

## Introducción

Al seleccionar el material de esta colección, he hecho todo lo posible por encontrar acertijos que fueran inusuales y divertidos, que sólo requirieran el más elemental conocimiento de matemática, pero que al mismo tiempo proporcionaran una mirada estimulante a los niveles más altos del pensamiento matemático.

Los acertijos (muchos de los cuales aparecieron en mi columna "On the Light Side" - "Del lado liviano" - de Science World) están agrupados por secciones que se ocupan de diferentes áreas de la matemática. Un breve comentario al principio de cada sección sugiere algo acerca de la naturaleza y la importancia de la clase de matemática que debe utilizarse para resolver los acertijos de cada sección. En las respuestas, he tratado de incluir tantos detalles como permitiera el espacio para explicar cómo se resuelve cada problema, y señalar algunos de los invitantes senderos que se alejan de los problemas en cuestión hacia áreas más intrincadas de la jungla matemática.

Tal vez al jugar con estos acertijos descubras que la matemática es más divertida de lo que creías. Tal vez te hagan desear estudiar la asignatura en serio, o sientas menos vacilaciones para abocarte al estudio de una ciencia para la que se requiera cierto conocimiento de matemática avanzada.

Por cierto, nadie puede dudar hoy del enorme valor práctico de la matemática. Sin su utilización, los descubrimientos y los logros de la ciencia moderna hubieran sido imposibles. Pero muchas personas no advierten que los matemáticos verdaderamente disfrutan de la matemática. Les doy mi palabra de que da tanta satisfacción resolver un problema interesante por medio del pensamiento como voltear las diez clavas de madera con una sola bola de bowling.

En una de las más divertidas fantasías de L. Frank Baum, La Ciudad Esmeralda de Oz, Dorothy (junto con el Mago y su tío y su tía) visita la ciudad de Fuddlecumjig en el sector Quadling de Oz. Sus notables habitantes, los Fuddles, están hechos de pedazos de madera pintada, ingeniosamente encastrados como rompecabezas tridimensionales. En cuanto un extranjero se les acerca, se desarman hasta formar una pila de piezas separadas en el piso, para que el visitante tenga el placer de

volver a armarlos. Cuando el grupo de Dorothy está saliendo de la ciudad, la tía Em comenta:

- Esa es realmente gente extraña, pero de veras que no me doy cuenta de para qué sirven.

- Bueno, nos divertieron durante varias horas, replica el Mago. Estoy seguro de que eso nos fue útil.

- Creo que son más divertidos que jugar al solitario o al ta-te-ti agrega el tío Henry. Por mi parte, me alegra que los hayamos visitado.

Espero que puedan resistir la tentación de mirar la respuesta antes de haber intentado con toda seriedad resolver el problema. Y espero que cuando terminen con estos acertijos, estén contentos, igual que el tío Henry, de haber permitido que los confundieran.

Martin Gardner

### Biografía

Martin Gardner nació el 21 de octubre de 1914, en los EE.UU. Después de graduarse en filosofía, en la Universidad de Chicago, se dedicó al periodismo. Sus trabajos abarcan la divulgación científica, la crítica literaria e incluso la filosofía. En 1956 Gardner inició una legendaria sección mensual de juegos matemáticos en la revista *Scientific American*, que condujo por más de veinte años. Estos artículos, reunidos en una docena y pico de libros, hacen hoy la más rica e inspirada enciclopedia que existe en este campo. En temas literarios, son muy apreciados sus libros *The Annotated Alice* y *The Annotated Snark*, sobre las fantasías de Lewis Carroll. Otras dos de sus obras que gozan de gran popularidad son *Izquierda y derecha en el cosmos* y *La explosión de la relatividad*, y discurren sobre la simetría de las leyes físicas y sobre la teoría de Einstein



## Sección 1

### ACERTIJOS ARITMÉTICOS

#### **Contenido:**

1. [Los soquetes de colores](#)
2. [Problema de peso](#)
3. [La barra de plata](#)
4. [Los tres gatos](#)
5. [Los cigarrillos de la señora Pita](#)

Los números que se usan para contar (1, 2, 3, 4...) se llaman enteros. La aritmética es el estudio de los enteros con respecto a lo que se conoce como las cuatro operaciones fundamentales de la aritmética: adición, sustracción, multiplicación y división: (La Falsa Tortuga de Lewis Carroll, como recordarán, las llamaba Ambición, Distracción, Horripilación y Deprecación). La aritmética también incluye las operaciones de elevar un número a una potencia más alta (multiplicándolo por sí mismo cierto número de veces), y de extraer una raíz (descubrir un número que, si se lo multiplica por sí mismo cierto número de veces, igualará un número determinado).

No hace falta decir que jamás aprenderás álgebra ni ninguna rama más elevada de la matemática si no sabes muy bien aritmética. Pero aun cuando nunca aprendas álgebra, verás que la aritmética es esencial para cualquier profesión que se te ocurra. Una camarera tiene que sumar una cuenta, un agricultor debe calcular los beneficios de su cosecha. Hasta un lustrabotas debe saber dar el vuelto correctamente, y eso es pura aritmética. Es tan importante para la vida diaria como saber atarse los cordones de los zapatos.

Los acertijos de esta sección y de los dos que siguen no requieren otra habilidad que no sea la más simple aritmética y pensar claramente en lo que estás haciendo.

#### **1. Los soquetes de colores**

Hay diez soquetes rojos y diez soquetes azules mezclados en el cajón del armario. Los veinte soquetes son exactamente iguales, salvo por el color. El cuarto está

absolutamente a oscuras y tú quieres dos soquetes del mismo color. ¿Cuál es el menor número de soquetes que debes sacar del cajón para estar seguro de que tienes un par del mismo color?

### **Solución**

Mucha gente, al tratar de resolver este acertijo, se dice: "Supongamos que el primer soquete que saco es rojo. Necesito otro rojo para hacer el par, pero el próximo puede ser azul, y el próximo, y el próximo, y así hasta sacar del cajón los diez soquetes azules. El siguiente soquete tiene que ser rojo, así que la respuesta debe ser doce soquetes".

Pero este razonamiento pasa algo por alto. No es necesario que el par sea de soquetes rojos. Sólo es necesario que los dos soquetes sean de igual color. Si los dos primeros no son iguales, es seguro que el tercero será igual a uno de los otros dos, de modo que la respuesta correcta es tres soquetes.

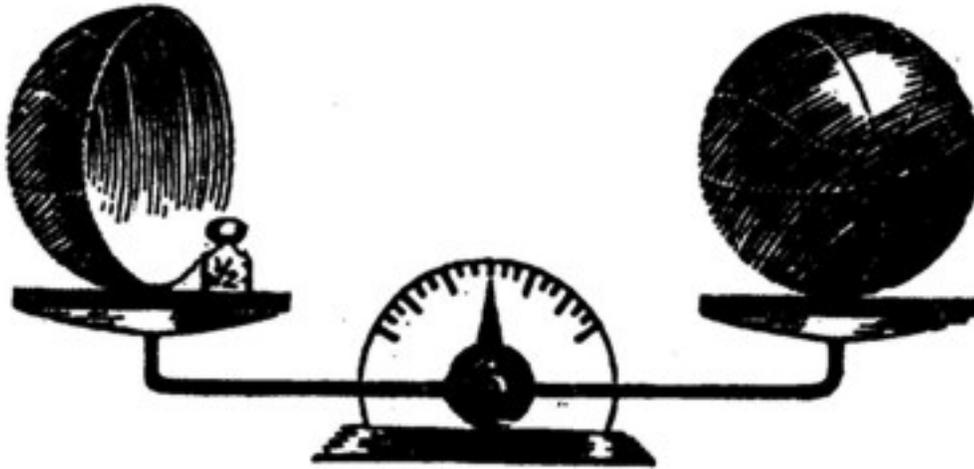
## **2. Problema de peso**

Si una pelota de basketball pesa  $\frac{1}{2}$  kilo más la mitad de su propio peso, ¿cuánto pesa?

### **Solución**

Antes de responder a este acertijo, es necesario saber exactamente qué significa cada palabra. Por ejemplo, se podría enfocar de esta manera: "La pelota de basketball pesa  $\frac{1}{2}$  kilo. La mitad de su peso debe ser  $\frac{1}{4}$  de kilo. Sumamos estos valores y obtenemos la respuesta de  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$  de kilo."

Pero el problema consiste en descubrir el peso de la pelota, y si resulta ser de tres cuartos, entonces no puede ser de medio kilo como se afirma al principio. Resulta claro que hay una contradicción en este punto, así que debemos haber interpretado mal la pregunta.



Hay solamente una interpretación que tiene sentido. El peso de la pelota de basketball es igual a la suma de los dos valores:  $1/2$  kilo y un valor desconocido que es la mitad del peso de la pelota de basketball. Esto puede representarse en una balanza de platillos tal como se ve en la ilustración.

Si se retira media pelota de basketball de cada platillo de la balanza, ésta seguirá en equilibrio. Habrá un peso de  $1/2$  kilo en un platillo y media pelota de basketball en el otro, de modo que media pelota de basketball debe pesar  $1/2$  kilo y la pelota entera debe pesar el doble, o sea un kilo.

En realidad, sin saberlo, ¡hemos resuelto el problema por medio del álgebra! En vez de usar la ilustración, representemos media pelota de basketball con la letra  $x$ . Y en vez de mostrar los dos platillos en equilibrio en una balanza, utilicemos el signo algebraico de igualdad. Ahora podemos escribir esta simple ecuación:

$$\frac{1}{2} + x = x + x$$

Si se quita la misma cantidad de ambos lados de esta ecuación, seguirá "equilibrada". Así, si quitamos una  $x$  de cada lado, nos queda:

$$\frac{1}{2} = x$$

Recordemos que  $x$  representaba la mitad de la pelota de basketball. Si media pelota pesa  $1/2$  kilo, entonces la pelota entera debe pesar un kilo.

### 3. La barra de plata

Un buscador de plata no podía pagar su alquiler de marzo por adelantado. Tenía una barra de plata pura de 31 centímetros de largo; de modo que hizo con su casera el siguiente arreglo: Le dijo que cortaría la barra en pedazos más pequeños. El primer día de marzo le daría a la casera un centímetro de la barra, y cada día subsiguiente le agregaría otro centímetro más. Ella conservaría la plata en prenda. A fin de mes, el buscador esperaba estar en condiciones de pagarle la renta completa, y ella le devolvería los pedazos de la barra de plata.



Marzo tiene 31 días, de modo que una manera de cortar la plata era dividirla en 31 partes, cada una de un centímetro de largo. Pero como era bastante laborioso cortarla, el buscador deseaba cumplir el acuerdo dividiéndola en el menor número posible de partes. Por ejemplo, podía darle a la casera un centímetro el primer día, otro centímetro el segundo día, y el tercer día podía entregarle una parte de tres centímetros y recibir a cambio las dos partes anteriores de un centímetro.

Suponiendo que las porciones de barra fueran entregadas y devueltas de esta manera, ve si puedes determinar el menor número posible de partes en las que el buscador debe dividir su barra de plata.

#### Solución

El buscador puede cumplir el trato cortando su barra de plata de 31 cm en cinco partes de 1, 2, 4, 8 y 16 cm de longitud. El primer día le da a la casera el pedazo de 1 cm, el día siguiente ella se lo devuelve y él da el pedazo de 2 cm; el tercer día él vuelve a darle el pedazo de 1 cm., el cuarto día ella le devuelve ambas piezas y él le da el pedazo de barra de plata de 4 cm. Al dar y devolver de ésta manera, el buscador puede agregar un centímetro por día y cubrir así los 31 días del mes.

La solución de este problema puede expresarse muy simplemente en el sistema binario de la aritmética. Es un método para expresar números enteros utilizando solamente los dígitos 1 y 0. Recientemente se ha convertido en un sistema importante porque la mayoría de las computadoras electrónicas gigantes operan sobre una base binaria. Así es como se escribiría el número 27, por ejemplo, si usamos el sistema binario:

**11011**

¿Cómo sabemos que éste es el 27? La manera de traducirlo a nuestro sistema decimal es la siguiente: sobre el dígito de la derecha del número binario, escribimos "1". Sobre el dígito siguiente, hacia la izquierda, escribimos "2"; sobre el tercer dígito hacia la izquierda escribimos "4"; sobre el dígito siguiente, "8", y sobre el último dígito de la izquierda, "16". (Ver figura 3). Estos valores forman la serie 1, 2, 4, 8, 16, 32... en la que cada número es el doble del que lo precede.

16	8	4	2	1
1	1	0	1	1

El paso siguiente consiste en sumar todos los valores que estén sobre los "1" del número binario. En este caso, los valores son 1, 2, 8, 16 (4 no se incluye porque está sobre un 0). Sumados dan 27, de modo que el número binario 11011 es igual al 27 de nuestro sistema numérico.

**Números Binarios del 1 al 31 de marzo**

	16	8	4	2	1
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1

<b>8</b>		1	0	0	0
<b>9</b>		1	0	0	1
<b>10</b>		1	0	1	0
<b>11</b>		1	0	1	1
<b>12</b>		1	1	0	0
<b>13</b>		1	1	0	1
<b>14</b>		1	1	1	0
<b>15</b>		1	1	1	1
<b>16</b>	1	0	0	0	0
<b>17</b>	1	0	0	0	1
<b>18</b>	1	0	0	1	0
<b>19</b>	1	0	0	1	1
<b>20</b>	1	0	1	0	0
<b>21</b>	1	0	1	0	1
<b>22</b>	1	0	1	1	0
<b>23</b>	1	0	1	1	1
<b>24</b>	1	1	0	0	0
<b>25</b>	1	1	0	0	1
<b>26</b>	1	1	0	1	0
<b>27</b>	1	1	0	1	1
<b>28</b>	1	1	1	0	0
<b>29</b>	1	1	1	0	1
<b>30</b>	1	1	1	1	0
<b>31</b>	1	1	1	1	1

Cualquier número de 1 a 31 puede expresarse de esta manera con un número binario de no más de cinco dígitos. Exactamente de la misma manera, puede formarse cualquier número de centímetros de plata, de 1 a 31, con cinco pedazos de plata si las longitudes de esas cinco piezas son de 1, 2, 4, 8 y 16 centímetros.

La tabla anterior consigna los números binarios para cada día de marzo. Advertirás que para el 27 de marzo el número es 11011. Esto nos dice que los 27 cm de plata de la casera estarán formados por las piezas de 1, 2, 8 y 16 cm. Elige un día al azar y advierte con cuánta rapidez puedes calcular exactamente cuáles piezas de plata sumadas dan la cantidad que corresponde al número del día.

#### 4. Los tres gatos

Si tres gatos atrapan tres ratas en tres minutos, ¿cuántos gatos atraparán 100 ratas en 100 minutos?



### Solución

La respuesta usual de este viejo acertijo es la siguiente: si a tres gatos les lleva tres minutos atrapar tres ratas, debe llevarles un minuto atrapar, cada rata. Y si les lleva un minuto cazar una rata, entonces los mismos tres gatos cazarán 100 ratas en 100 minutos.

Desafortunadamente, no es tan simple; esa respuesta presupone algo que por cierto no está expresado en el problema. Supone que los tres gatos han concentrado su atención en la misma rata hasta cazarla en un minuto, para luego dedicarse en conjunto a otra rata. Pero supongamos que en vez de hacer eso cada gato cace una rata diferente, y le lleve tres minutos atraparla. En ese caso, tres gatos seguirían cazando tres ratas en tres minutos. Les llevaría seis minutos cazar seis ratas, nueve minutos cazar nueve ratas, y 99 minutos cazar 99 ratas.

Ahora debemos enfrentar una curiosa dificultad. ¿Cuánto tiempo les llevará a esos mismos tres gatos cazar la rata número 100? Si les sigue insumiendo tres minutos la cacería, entonces los tres gatos demorarán 102 minutos para cazar las 100 ratas. Para cazar cien ratas en cien minutos, suponiendo que sea ésa la manera en la que los gatos cazan a sus ratas, por cierto necesitaremos más de tres gatos y menos de cuatro.

Por supuesto, es posible que cuando los tres gatos se concentran sobre la misma rata, tal vez puedan acorralarla en menos de tres minutos, pero nada en el enunciado del problema nos dice de qué modo podemos medir exactamente el

tiempo que demandará esa operación. La única respuesta correcta al problema, entonces, es ésta: la pregunta es ambigua y no puede responderse si no se da más información acerca de la manera en que esos gatos cazan ratas.

### 5. Los cigarrillos de la señora Pita

La señora Pita, una gran fumadora durante muchos años, finalmente decidió dejar de fumar. "Acabaré los veintisiete cigarrillos que me quedan", se dijo, «y jamás volveré a fumar".

La costumbre de la señora Pita era fumar exactamente dos tercios de cada cigarrillo. No tardó mucho en descubrir que con la ayuda de una cinta engomada podía pegar tres colillas y hacer otro cigarrillo. Con 27 cigarrillos, ¿cuántos cigarrillos puede fumar antes de abandonar el tabaco para siempre?

### Solución

Después de fumar 27 cigarrillos, la señora Pita juntó las colillas necesarias para hacer 9 cigarrillos más. Estos 9 cigarrillos dejaron colillas como para hacer otros 3; entonces con las últimas tres colillas hizo el último cigarrillo. En total: 40 cigarrillos. La señora Pita nunca volvió a fumar: jamás logró recuperarse de la pitada final.



## Sección 2

### Acertijos con dinero

#### **Contenido:**

1. [El ciclomotor de segunda mano](#)
2. [Bajas finanzas](#)
3. [Nada de cambio](#)
4. [La asignación de Beto](#)
5. [Elige tu paga](#)

"Si me das tu pistola de agua", dice el pequeño Tommy a su compañerito de juegos, "yo te daré mi camión". Esta clase de comercio es llamada "trueque". En las sociedades primitivas es la única manera en la que las cosas pueden "comprarse" y "venderse".

Si se piensa un momento en el tema se verá que es un sistema muy pobre. Un hombre que desee vender su vaca y comprarse un caballo no podrá hacerlo mientras no encuentre a otro que quiera vender su caballo y comprarse una vaca. Pueden pasar años antes de que encuentre a ese hombre. Y supongamos que un hombre quiera cambiar su vaca por una oveja que pertenece a un amigo y un cerdo que pertenece a otro. ¡No puede cortar su vaca por el medio y cambiar cada mitad por separado! De modo que ya ven, en cualquier sociedad complicada en la que se venden y compran muchas cosas, es necesario tener algo llamado dinero, algo que puede dividirse en cualquier cantidad que se desee y que tiene un valor con el que todo el mundo está de acuerdo.

En el pasado se ha usado casi cualquier cosa como dinero, pero el dinero de hoy consiste en monedas hechas de metal o billetes impresos. La matemática tiene pocos usos más importantes que el de saber resolver problemas de dinero. Los siguientes cinco problemas pondrán a prueba tu capacidad en este aspecto, y tal vez te enseñen unas cuantas cosas que antes no entendías del todo.

### 1. El ciclomotor de segunda mano

Bill vendió su ciclomotor a Tom por \$100. Después de usarlo durante unos días, Tom descubrió que estaba tan arruinado que se lo revendió a Bill por \$80.

El día siguiente, Bill se lo vendió a Herman por \$90.

¿Cuánto es la ganancia total de Bill?



### Solución

Este pequeño acertijo nunca deja de provocar discusiones. La mayor parte de las personas adopta una de las tres posiciones siguientes:

1. No sabemos cuánto costó originariamente el ciclomotor, así que después de la primera venta no tenemos manera de averiguar si Bill tuvo o no ganancias. Sin embargo, ya que volvió a comprarlo por \$80 y lo revendió a \$90, resulta claro que tuvo una ganancia de \$10.
2. Bill vendió su ciclomotor por \$100 y lo volvió a comprar por \$80. Tiene ahora el mismo ciclomotor más \$20 que antes no tenía, así que su ganancia es de \$20. La venta siguiente no nos dice nada, porque no conocemos el verdadero valor del ciclomotor, así que la ganancia total de Bill es de \$20.

3. Después de que Bill vuelve a comprar el ciclomotor, su ganancia es de \$20 tal como se ha explicado. Ahora lo vende por \$10 más de lo que pagó por él, por lo que tiene una ganancia adicional de \$10. Ganancia total, entonces, \$30.

¿Cuál es la correcta? ¡La respuesta es que todas son igualmente correctas! En una serie de transacciones que involucran el mismo objeto, la "ganancia total" es la diferencia entre lo que se pagó por él y la cantidad que uno tiene al final. Por ejemplo, si Bill hubiera pagado \$100 por el ciclomotor, y termina después con \$110, podríamos decir que su ganancia total es de \$10. Pero como no conocemos el precio original del ciclomotor, no podemos decir a cuánto asciende su ganancia final.

Sin embargo, la respuesta puede ser diferente si se da otro significado a la expresión "ganancia total". Muchos problemas de la vida son así. Se los llama "problemas verbales" o "problemas semánticos" porque tienen respuestas diferentes según la manera en que uno entienda las palabras más importantes de la enunciación del problema. No hay respuesta "correcta" si no existe un acuerdo acerca del significado de los términos.

## 2. Bajas finanzas

"Aparentemente he girado en descubierto", dijo el señor Green al presidente del banco, "aunque por mi vida que no sé cómo pudo haber ocurrido. Verá, originariamente tenía \$100 en el banco. Después hice seis extracciones. Esas extracciones suman \$100, pero según mis registros en el banco sólo había disponibles \$99. Permítame que le enseñe las cifras".

El señor Green alargó al presidente del banco una hoja de papel en la que había escrito:

Retiros (\$)	Saldo en depósito (\$)
50	50
25	25
10	15
8	7
5	2

2	0
<b>\$ 100</b>	<b>\$ 99</b>

"Como ve", dijo el señor Green, "aparentemente debo un dólar al banco".

El presidente del banco observó las cifras y sonrió. "Aprecio su honestidad, señor Green. Pero no nos debe nada".

"Entonces, ¿hay algún error en las cifras?" "No, sus cifras son correctas."

¿Puedes explicar cuál es el error?

### Solución

No hay razón alguna para que el depósito original del señor Green, de \$100, deba igualar el total de las cantidades que quedaron después de cada retiro. Es simplemente una coincidencia que el total de la columna de la derecha esté tan próximo a \$100.

Esto se ve fácilmente si se hacen cálculos que muestren diferentes series de retiros. He aquí dos posibilidades:

Retiros (\$)	Saldo en depósito (\$)
1	99
1	98
1	97
97	0
<b>\$ 100</b>	<b>\$ 294</b>

Como se ve; el total de la columna de la izquierda debe ser siempre \$100, pero el total de la columna de la derecha puede ser muy pequeño o muy grande. Suponiendo que los retiros nunca pueden ser de fracciones de un centavo, trata de determinar el total más pequeño y el más grande que puede sumar la columna de la derecha.

### 3. Nada de cambio

- Déme cambio de un dólar, por favor, dijo el cliente.

- Lo siento", dijo la señorita Jones, la cajera, después de buscar cuidadosamente en la caja, pero no puedo hacerlo con las monedas que tengo.
- ¿Puede entonces cambiarme medio dólar? La señorita Jones negó con la cabeza.
- En realidad, dijo, ni siquiera tenía para cambiar ni veinticinco, ni diez, ni cinco centavos!
- ¿No tiene ninguna moneda?, preguntó el cliente.
- Oh, sí, dijo la señorita Jones. Tengo \$1,15 en monedas.
- ¿Cuáles eran exactamente las monedas que había en la caja registradora?

### Solución

Si la señorita Jones no podía cambiar un dólar, entonces no podía haber en la caja más de un medio dólar. Si no podía cambiar medio dólar, la caja no podía tener más de una moneda de veinticinco y no más de cuatro de diez: Que no tuviera cambio de diez centavos significa que no tenía más que una moneda de cinco, y que no tuviera cambio de cinco centavos significa que no tenía más que cuatro monedas de un centavo. Así que la caja registradora no podía tener más que:

1 medio dólar	\$ 0,50
1 de veinticinco centavos	0,25
4 de diez centavos	0,40
1 de cinco centavos	0,05
4 de un centavo	0,04
	<b>\$1,24</b>

Sin embargo, se puede dar cambio de un dólar con estas monedas (por ejemplo, un medio dólar, una moneda de veinticinco centavos, dos de diez y una de cinco), pero sabemos que la caja registradora no puede tener más monedas de las consignadas arriba. Sumadas dan \$1,24, que es 9 centavos más que \$1,15, la cantidad que la cajera dice que tiene.

Ahora bien, la única manera de juntar 9 centavos es con una moneda de cinco centavos y cuatro de uno, de modo que esas son las monedas que debemos

eliminar. Las monedas restantes, un medio dólar, una de veinticinco y cuatro de diez, no permiten dar cambio de un dólar ni de ninguna moneda más chica, y suman \$1,15, así que ésta es la única respuesta del problema.

#### 4. La asignación de Beto

Beto quería que su padre le diera una asignación semanal de \$1, pero su padre se negó a darle más de 50 centavos. Después de discutirlo un rato, Beto (que era bastante rápido en aritmética), dijo:

- Quiero decirte algo, papá. Supongamos que lo hacemos de esta manera: hoy es primero de abril. Me das un centavo hoy. Mañana, me das dos centavos. Pasado mañana me das cuatro centavos. Cada día me das el doble de centavos que el día anterior.

- ¿Por cuánto tiempo?, preguntó el padre, con cautela.

- Sólo por el mes de abril", dijo Beto. Después no te pediré más dinero durante el resto de mi vida.

- Muy bien, dijo el padre rápidamente. ¡Trato hecho!

¿Cuál de las siguientes cifras crees que se aproxima más a la cantidad de dinero que el padre deberá dar a Beto durante el mes de abril?

- \$ 1
- \$ 10
- \$ 100
- \$ 1.000
- \$ 10.000
- \$ 100.000
- \$ 1.000.000
- \$ 10.000.000

#### Solución

Si se duplica un centavo, la cifra crece despacio al principio, después más rápido y finalmente aumenta a los saltos. Es difícil de creer, pero si el pobre padre de Beto cumple con su palabra, itendrá que pagarle a Beto más de diez millones de dólares!

El primer día el padre le da a Beto un centavo. Al día siguiente, dos, lo que hace un total de tres. El tercer día da a su hijo 4 centavos, totalizando así 7. Hagamos una tabla que cubra la primera semana:

<b>Día del mes</b>	<b>Centavos ese día</b>	<b>Total</b>
1	1	1
2	2	3
3	4	7
4	8	15
5	16	31
6	32	63
7	64	127

Si la tabla continúa, se verá que el pago final del padre, el 30 de abril, será de \$5.368.709,12, es decir más de cinco millones de dólares. Sin embargo, esa es solamente la cifra del último pago. Todavía debemos averiguar cuánta tiene que pagar en total, y para saberlo debemos sumar sus treinta pagos. Podemos hacerlo rápidamente utilizando el siguiente atajo:

Advierte que cada uno de los números de la columna de la derecha es el doble menos uno del número que está en la columna central. De modo que todo lo que tenemos que hacer entonces es duplicar el último pago, lo que nos da \$10.737.418,24, después restarle un centavo, y tendremos la cifra \$10.737.418,23. Esta es la cifra total que el padre deberá aflojar si es que cumple con su palabra.



### 5. Elige tu paga

Supongamos que tienes un nuevo empleo, y el jefe te ofrece elegir entre:

1. \$4.000 por tu primer año de trabajo, y un aumento de \$800 por cada año subsiguiente.
2. \$2.000 por los primeros seis meses y un aumento de \$200 cada seis meses subsiguientes.

¿Cuál oferta aceptarías y por qué?

### Solución

Por sorprendente que parezca, la segunda oferta es mucho mejor que la primera. Si la aceptas, ganarás \$200 más por año de lo que ganarías si aceptaras la otra. La siguiente tabla muestra tus ganancias totales, sobre la base de ambas ofertas, para los primeros seis años de trabajo:

Año	Oferta A (\$)	Oferta B (\$)
-----	---------------	---------------

1	4.000	4.200
2	4.800	5.000
3	5.600	5.800
4	6.400	6.600
5	7.200	7.400
6	8.000	8.200



### Sección 3

## Acertijos de velocidad

#### **Contenido:**

1. [Las bicicletas y la mosca](#)
2. [El sombrero flotante](#)
3. [Viaje de ida y vuelta](#)
4. [La paradoja del aeroplano](#)

Vivimos en un mundo en el que todo está en permanente cambio, aunque de diez mil maneras diferentes y a diferentes velocidades. El cielo puede oscurecerse en unas pocas horas, una banana se oscurece en unos días. Los colores del empapelado se destiñen tan lentamente que pueden pasar años antes de que advirtamos el cambio. Algunos cambios son extremadamente irregulares, como las maneras en las que cambias de posición mientras duermes. Otros cambios, como los de la luna o la vibración de un átomo en una molécula, son más regulares que un reloj.

La rama de la matemática más dedicada al cambio se llama cálculo. Es imposible ser físico actualmente sin saber cálculo, pero antes de entenderlo, debes saber primero muchísimo acerca de la matemática de los tipos de cambios simples y regulares que pueden resolverse por medio de la aritmética común. El ejemplo más común de ese tipo de cambio es el cambio de posición que denominamos velocidad constante. Se expresa por medio de la proporción entre la distancia y el tiempo:

$$\text{Velocidad} = \text{Distancia} / \text{Tiempo}$$

Teniendo presente esta fórmula, y con una idea clara, tal vez puedas resolver los cuatro inusuales problemas de velocidad que aquí te presento.

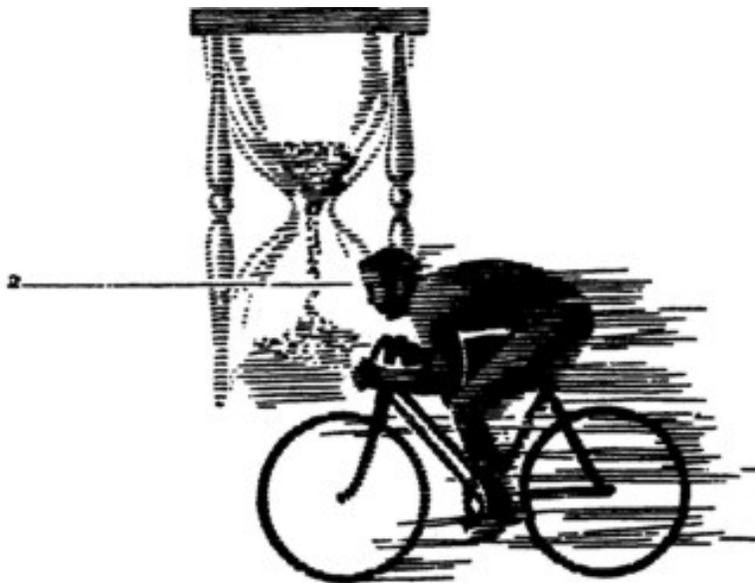
## 1. Las bicicletas y la mosca

Dos muchachos en bicicleta, a 20 kilómetros de distancia entre sí, empiezan a andar para reunirse. En el momento en que parten, una mosca que está en el manubrio de una de las bicicletas empieza a volar directamente hacia el otro ciclista. En cuanto llega al otro manubrio, da la vuelta y vuela de regreso al primero. La mosca voló ida y vuelta de manubrio a manubrio hasta que las dos bicicletas se reunieron. Si cada bicicleta marchó a una velocidad constante de 10 km por hora, y la mosca voló a una velocidad constante de 15 km por hora, ¿qué distancia voló la mosca?

### Solución

Cada bicicleta marcha a 10 km por hora, por lo que se reunirán, en la mitad de la distancia de veinte kilómetros que las separa, en una hora. La mosca vuela a 15 km por hora, de modo que después de una hora habrá recorrido 15 kilómetros.

Muchas personas tratan de resolver el problema de la manera más difícil. Calculan la longitud del primer recorrido de la mosca entre ambos manubrios, después la longitud del recorrido de regreso y así sucesivamente para recorridos cada vez más cortos. Pero ese procedimiento involucra lo que se llama la suma de una serie infinita, y es matemática muy compleja y avanzada.



Se dice que al matemático húngaro John von Neumann, tal vez el más grande matemático del mundo cuando murió en 1957, se le planteó este problema una vez en un cocktail. Pensó un momento y luego dio la respuesta correcta. La persona que había planteado el problema pareció un poco decepcionada. Explicó que la mayoría de los matemáticos pasaban por alto la manera más simple de resolverlo y lo hacían por medio del complejo proceso de sumar una serie infinita.

Von Neumann se sorprendió. "Pero si así lo resolví yo", dijo.

## 2. El sombrero flotante

Un pescador que llevaba un gran sombrero de paja estaba pescando desde un bote en un río que fluía a una velocidad de tres kilómetros por hora. "Creo que remaré corriente arriba unos pocos kilómetros", se dijo. "Aparentemente, aquí no hay pique".

Justo en el momento en que empezó a remar, el viento le voló el sombrero, que cayó al agua junto al bote. Pero el pescador no advirtió que su sombrero se le había volado hasta que no estuvo a cinco kilómetros de su sombrero, corriente arriba. Entonces advirtió lo que había pasado, de modo que empezó a remar corriente abajo hasta que llegó hasta el sombrero que flotaba.



En aguas quietas, la velocidad con que rema el pescador es siempre de cinco kilómetros por hora. Cuando remaba corriente arriba, lo hacía a esta misma velocidad constante, pero por supuesto que esa no era su velocidad con respecto a la costa del río. Por ejemplo, cuando remaba corriente arriba a cinco kilómetros por hora, el río lo llevaba corriente abajo a tres kilómetros por hora, de modo que pasaba junto a los objetos de la costa a sólo dos kilómetros por hora. Y cuando

remaba corriente abajo, la velocidad del río combinada con su propia velocidad lo hacía avanzar a una velocidad de ocho kilómetros por hora con respecto a la costa. Si el pescador perdió su sombrero a las dos de la tarde, ¿qué hora era cuando lo recuperó?

### **Solución**

Como la velocidad del río ejerce el mismo efecto sobre el bote y el sombrero, puede ignorársela completamente para resolver este problema. En vez de pensar que el agua se mueve y que la costa permanece fija, imagina que el agua está perfectamente quieta y que la que se mueve es la costa. En lo que se refiere al bote y al sombrero, esta situación es exactamente igual que la anterior. Como el hombre se aleja remando cinco kilómetros del sombrero, y luego recorre esos mismos cinco kilómetros de regreso, eso significa que ha remado una distancia total de diez kilómetros con respecto al agua. Rema a una velocidad de cinco kilómetros por hora con respecto al agua, así que le habrá llevado dos horas recorrer diez kilómetros. Por lo tanto, recuperará su sombrero a las cuatro de la tarde.

Esta situación es comparable a la de calcular velocidades y distancias en la superficie de la tierra. La tierra se desplaza en el espacio, pero como ese movimiento ejerce el mismo efecto sobre todos los objetos de la superficie, puede ignorárselo completamente en casi todos los problemas de velocidad y distancia.

### **3. Viaje de ida y vuelta**

Cuando se viaja en auto, sin duda el auto viajará a velocidades diferentes en diferentes momentos. Si la distancia total se divide por el tiempo total de manejo, el resultado es la velocidad promedio de ese viaje.



El señor Smith quería viajar de Chicago a Detroit y luego regresar. Deseaba hacer una velocidad promedio de 60 kilómetros por hora en todo el viaje de ida y vuelta. Al llegar a Detroit descubrió que la velocidad promedio, hasta ese momento, era de 30 kilómetros por hora.

¿Cuál debe ser la velocidad promedio en el viaje de vuelta para que el promedio del viaje completo sea de 60 kilómetros por hora?

### **Solución**

No es necesario saber la distancia entre Chicago y Detroit para resolver este problema. Cuando Smith llegó a Detroit, había recorrido cierta distancia y le había insumido cierta cantidad de tiempo. Si lo que desea es duplicar su velocidad promedio, es necesario que recorra el doble de esa distancia en la misma cantidad de tiempo. Resulta claro que, para lograrlo, debe volver a Chicago sin insumir ningún tiempo! Como eso es imposible, no hay manera en la que Smith pueda aumentar su velocidad promedio a 60 kilómetros por hora. No importa con cuánta rapidez haga el viaje de regreso, siempre logrará un promedio menor de 60 kilómetros por hora.

Será más fácil comprenderlo si atribuimos una cierta distancia para que Smith recorra, digamos 30 kilómetros de ida y 30 de vuelta. Como su velocidad promedio es de 30 kilómetros por hora, Smith completará la primera mitad de su viaje en una hora. Desea hacer el viaje completo a una velocidad promedio de 60 kilómetros por

hora, lo que significa que debe completar el viaje entero en una hora. Pero ya ha usado esa hora. No importa con cuánta rapidez retorne, pues el tiempo total será de más de una hora, por lo que habrá recorrido 60 kilómetros en más de una hora y su velocidad promedio será menor a 60 kilómetros por hora.

#### 4. La paradoja del aeroplano

Un aeroplano vuela de la ciudad A a la ciudad B, luego regresa a A. Cuando no hay viento, su velocidad promedio a tierra (velocidad con respecto a la tierra) de todo el viaje es de 100 kilómetros por hora. Supongamos que un viento constante sopla en línea recta desde la ciudad A a la ciudad B. ¿De qué modo afectará este viento la velocidad promedio a tierra del aeroplano, suponiendo que vuela en todo momento a la misma velocidad de máquina que antes?

El señor White argumenta: "Eso no afectará en nada la velocidad promedio. El viento aumentará la velocidad del aeroplano durante su vuelo de A a B, pero en el viaje de regreso la disminuirá en la misma medida".

"Eso suena razonable", asiente el señor Brown, "pero supongamos que el viento es de 100 kilómetros por hora. El aeroplano volará de A a B a 200 kilómetros por hora, ipero su velocidad de retorno será cero! El aeroplano no podrá volver."

¿Puedes explicar esta aparente paradoja?



**Solución**

El señor White está en lo cierto al decir que el viento aumenta la velocidad del aeroplano en una dirección tanto como la disminuye cuando el aeroplano vuela en dirección opuesta. Pero está equivocado cuando dice que el viento no afectará la velocidad promedio a tierra del aeroplano en el viaje de ida y vuelta.

Lo que el señor White no ha considerado es la cantidad de tiempo que el aeroplano vuela a una u otra velocidad. El viaje de regreso, contra el viento, demorará mucho más que el viaje realizado a favor del viento. Como resultado, toma más tiempo el vuelo a velocidad reducida, así que la velocidad promedio con respecto a la tierra de ambos viajes será menor que si no hubiera viento. Cuanto más fuerte el viento, tanto mayor será la reducción de la velocidad. Cuando la velocidad del viento iguala o excede la velocidad del aeroplano, la velocidad promedio del viaje completo es cero porque el aeroplano no puede regresar.



## Sección 4

### Acertijos de geometría plana

#### **Contenido:**

1. [De esquina a esquina](#)
2. [El joven hindú y el gato](#)
3. [Cortando el pastel](#)
4. [¿Dónde va el cuadrado?](#)

Si quisiéramos ser muy técnicos y estar actualizados, podríamos hablar de la geometría citando esta definición: "El estudio de las propiedades invariantes de elementos dados, sometidos a grupos de transformaciones específicas". Para comprenderla, tendrías que saber qué significa cada una de las palabras, y algunas de ellas no son fáciles de explicar. Así que utilizaremos un enfoque menos técnico y diremos simplemente que la geometría estudia las dimensiones y las formas de las cosas.

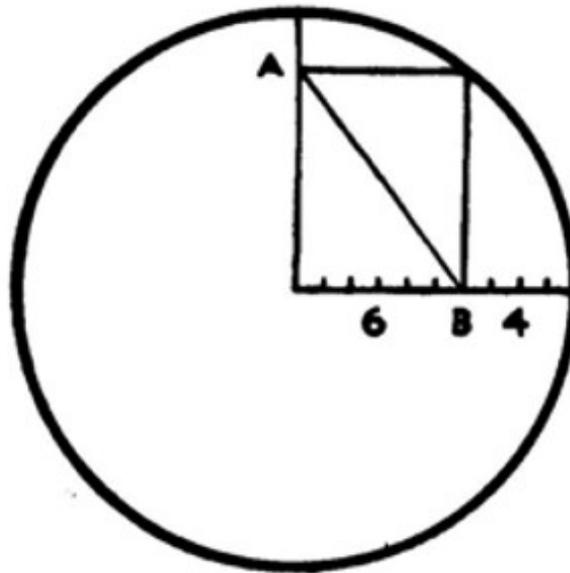
La geometría plana es la rama más elemental de la geometría. Se ocupa de las propiedades matemáticas de las figuras planas tales como líneas, ángulos, triángulos, cuadrados y círculos, que pueden dibujarse en una hoja de papel con la ayuda de una regla y un compás. Se inició en el antiguo Egipto, pero fueron los griegos los que primero la convirtieron en una ciencia. Los griegos estaban interesados en la geometría plana no sólo porque fuera útil para la carpintería y la arquitectura, sino también a causa de su gran belleza. Los griegos creían que ningún hombre podía creerse verdaderamente educado si no entendía algo de geometría.

Los cuatro problemas que siguen no requieren ningún conocimiento especial de geometría plana, pero pondrán a prueba tu habilidad con respecto a la clase de pensamiento gráfico que tan útil resulta para resolver problemas geométricos.

### 1. De esquina a esquina

Muchas veces un problema geométrico es terriblemente difícil si se lo enfoca de manera equivocada. Se lo enfoca de otra manera y resulta absurdamente simple. Este problema es un caso clásico.

Dadas las dimensiones (en centímetros) que muestra la ilustración, ¿con qué rapidez puedes calcular la longitud de la diagonal del rectángulo que va de la esquina A a la esquina B?



### Solución

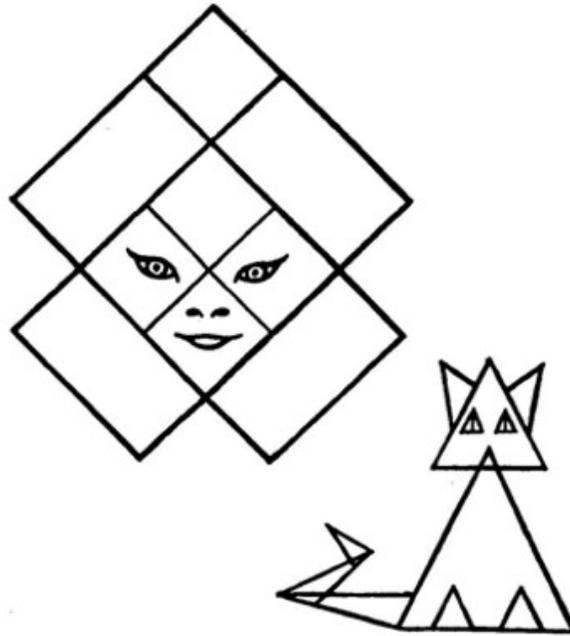
Dibuja la otra diagonal del rectángulo e inmediatamente verás que es el radio del círculo. Las diagonales de un rectángulo son siempre iguales, por lo tanto, la diagonal que va de la esquina A a la B es igual al radio del círculo, ique mide 10 centímetros!

### 2. El joven hindú y el gato

¿Cuántos cuadrados distintos puedes contar en el dibujo del joven hindú con turbante?

¿Cuántos triángulos distintos puedes contar en el dibujo del gato?

Observa atentamente. ¡Los problemas no son tan fáciles como podría parecer!



**Solución**

Al resolver problemas de este tipo siempre es mejor contar las figuras de algún modo sistemático. En el dibujo del joven hindú, tomemos los cuadrados por orden de tamaño:

<b>Cuadrados pequeños</b>	<b>5</b>	
<b>Cuadrados medianos</b>	<b>5</b>	
<b>Cuadrados grandes</b>	<b>1</b>	
<b>Total</b>	<b>11</b>	

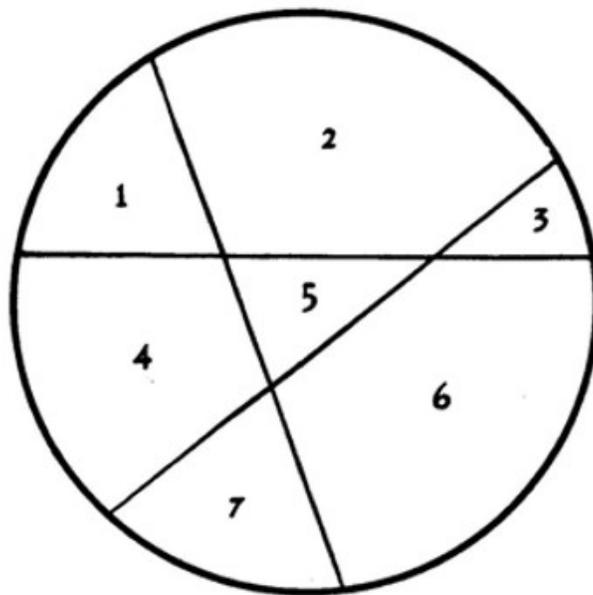
Los triángulos del gato pueden contarse así:

<b>Cabeza</b>	10	
<b>Cuerpo y pies</b>	3	
<b>Cola</b>	<u>7</u>	
<b>Total</b>	<b>20</b>	

**3. Cortando el pastel**

Con un solo corte recto puedes dividir un pastel en dos partes. Un segundo corte que atraviese el primero producirá probablemente cuatro partes, y un tercer corte (ver la ilustración) puede llegar a producir siete partes.

¿Cuál es el mayor número de partes que puedes lograr con seis cortes rectos?



**Solución**

En vez de resolver este problema por medio del ensayo y el error, una manera mejor es descubrir la regla que nos dará el mayor número de partes que pueden obtenerse con cualquier número de cortes.

El pastel sin cortar es una sola parte, de modo que cuando se hace el corte nº 1 se suma una parte más, lo que da dos partes en total.

El corte nº 2 suma dos partes más, totalizando 4.

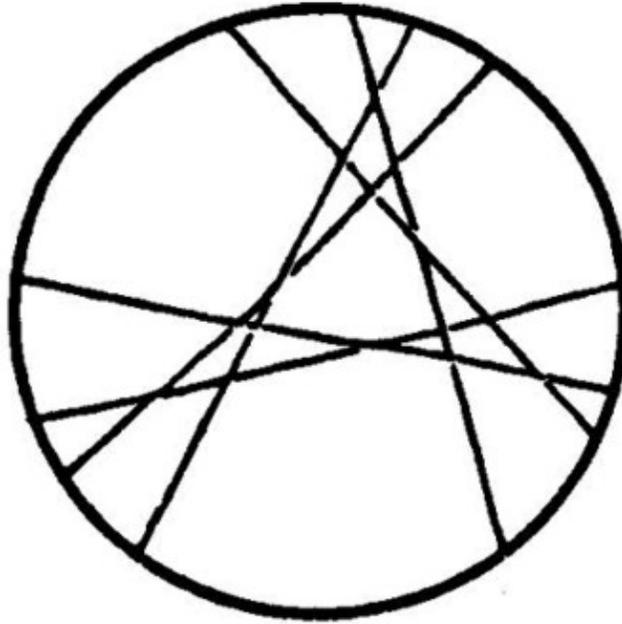
El corte nº 3 suma tres partes más, totalizando 7.

Parece que cada corte suma un número de partes que es igual al número del corte. Esto es cierto, y no resulta difícil observar por qué. Considérese, por ejemplo, el tercer corte. Atraviesa dos líneas previas. Esas dos líneas dividen a la tercera en tres secciones. Cada una de esas tres secciones divide un pedazo de pastel en dos partes, de modo que cada sección agregará un pedazo extra, y las tres secciones, naturalmente, agregarán tres pedazos.

Lo mismo ocurre en el caso de la cuarta línea. Puede marcarse de manera que cruce las otras tres líneas. Esas tres líneas dividirán a la cuarta en cuatro secciones. Cada sección agrega un pedazo extra, de modo que las cuatro secciones agregarán cuatro pedazos más y lo mismo ocurre en el caso de la quinta línea, de la sexta y de todas las que deseemos agregar. Este tipo de razonamiento, que va desde el caso particular hasta un número infinito de casos, se conoce como inducción matemática. Si se tiene en cuenta esta regla, resulta fácil hacer una tabla que muestre el mayor número de partes que producirá cada corte:

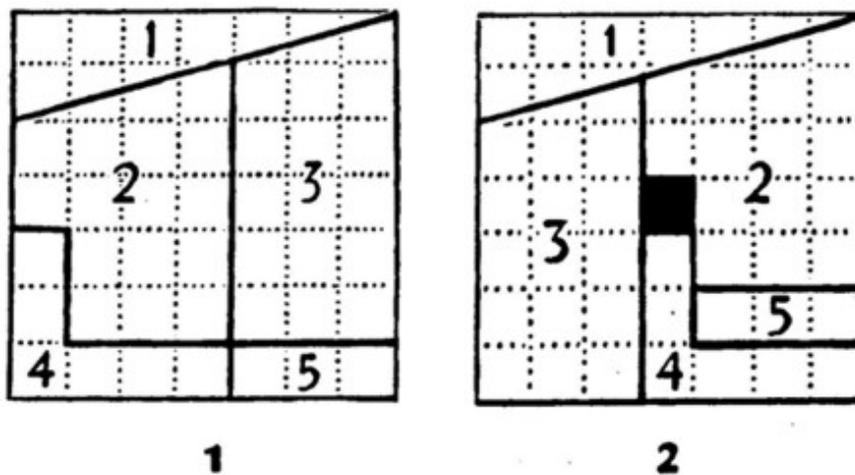
<b>Número de cortes</b>	<b>Número de partes</b>
0	1
1	2
2	4
3	7
4	11
5	16
6	22

¿Cuántas partes pueden hacerse con siete cortes? Sólo tenemos que sumar 7 a 22 para saber que la respuesta es 29. La ilustración muestra cómo puede lograrse que seis cortes produzcan 22 partes, que es la respuesta del problema original.



**4. ¿Donde va el cuadrado?**

Paul Curry, un mago aficionado de la ciudad de Nueva York, fue el primero que descubrió que un cuadrado puede cortarse en unas pocas partes, y que estas partes pueden reacomodarse y formar un cuadrado de la misma medida, ipero con un agujero!



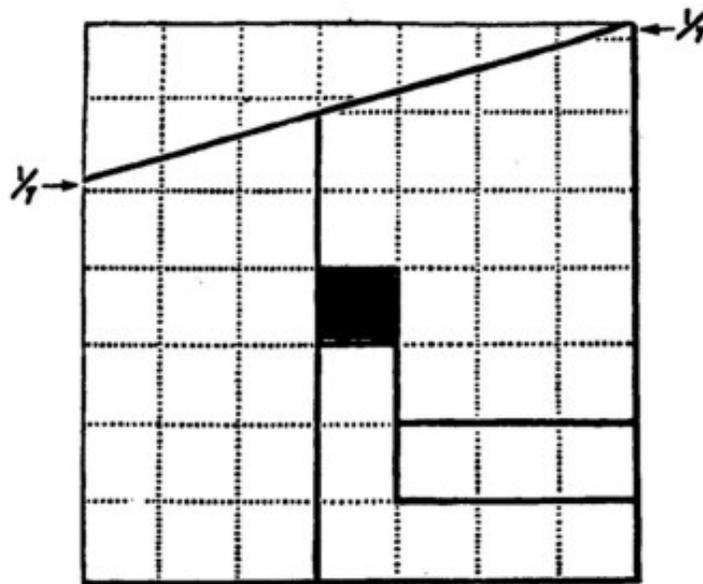
Hay muchas versiones de la paradoja de Curry, pero la ilustrada en las figuras 1 y 2 es la más simple de todas. Pega una hoja de papel sobre un pedazo de cartón.

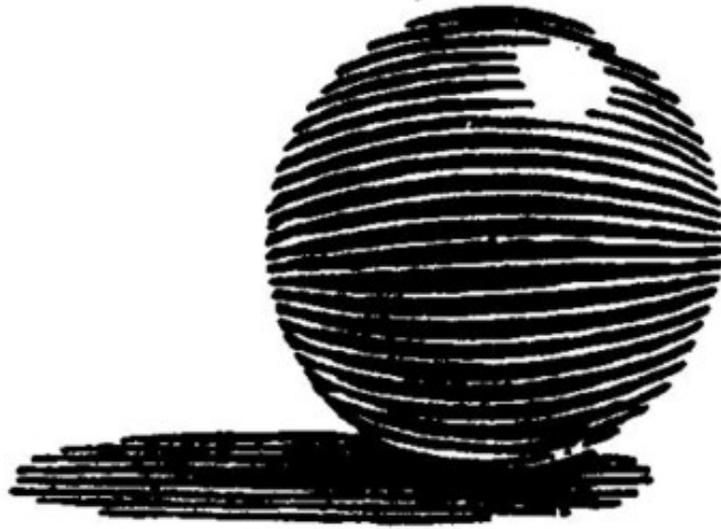
Dibuja el cuadrado que muestra la figura 1, después corta siguiendo las líneas para formar cinco partes. Cuando reacomodas esas cinco partes de la manera que se ve en la figura 2... ¡Aparecerá un agujero en el centro del cuadrado!

El cuadrado de la figura 1 está compuesto por 49 cuadrados más pequeños. El cuadrado de la figura 2 sólo tiene 48 cuadrados más pequeños. ¿Cuál de los cuadrados pequeños desapareció, y dónde fue?

### Solución

Al cambiar de lugar las dos partes más grandes, cada uno de los cuadrados pequeños cortados por la línea diagonal se torna un poquito más alto que ancho. Esto significa que el cuadrado mayor ya no es un cuadrado perfecto. Su altura ha aumentado en un área exactamente igual al área del agujero.





## Sección 5

### Acertijos de geometría sólida.

#### **Contenido:**

1. [Bajo la banda](#)
2. [La tercera línea](#)
3. [Los cubos pintados](#)
4. [La pelota de baloncesto moteada](#)

Cuando nos desplazamos de la geometría plana a la geometría sólida, abandonamos el mundo chato y bidimensional de la hoja de papel o la pantalla de TV para llegar al rico mundo tridimensional de la vida cotidiana. Nuestros cuerpos son tridimensionales. Nuestras casas son tridimensionales. Vivimos en un sólido tridimensional que es una esfera ligeramente achatada en los polos y con levísima forma de pera. La geometría sólida estudia las formas y las dimensiones de todas las cosas tridimensionales.

Tal vez hayas advertido que muchas figuras bidimensionales tienen primos cercanos en las tres dimensiones. Sobre el plano, el compás traza un círculo. En el aire, si mantenemos la punta del compás en una posición fija y dejamos que la punta que tiene el lápiz oscile en todas las direcciones (o si rotamos un círculo), describirá la superficie de una esfera. Cuando un joven quiere describir a alguien "más cuadrado" que un "cuadrado", usa el nombre de la contraparte tridimensional del cuadrado, y habla de un "cubo"<sup>1</sup>. El triángulo equilátero también tiene su contraparte tridimensional, el tetraedro. Es una pirámide con cuatro caras, cada una de las cuales es un triángulo equilátero.

La capacidad de pensar tridimensionalmente, que los cuatro problemas de esta sección ponen a prueba, es de gran importancia en casi todas las ciencias.

#### **1. Bajo la banda**

Imagina que te hallas en una esfera perfectamente lisa tan grande como el sol. Hay una banda de acero que abraza estrechamente la esfera alrededor del ecuador.

---

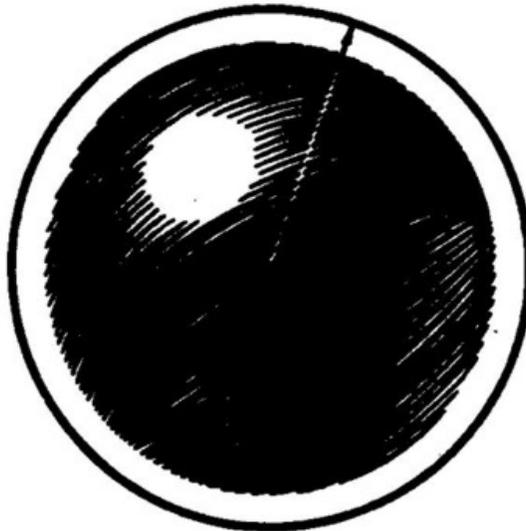
<sup>1</sup> N. del T. "Square" y "cube" son denominaciones despectivas que los jóvenes norteamericanos aplican a aquellos que consideran anticuados y convencionales.

Se agrega a esta banda un metro de acero, de manera que se eleve de la esfera a igual altura en todo el contorno. Eso dejará la banda a una altura suficiente como para que puedas:

1. ¿deslizar un naipe por debajo de ella?
2. ¿deslizar una mano debajo de ella?
3. ¿deslizar una pelota de béisbol por debajo de ella?

### Solución

Parece sorprendente, pero esa banda de acero, después de que se le agregue un metro,.. ¡Se alzarán casi 16 centímetros en todo el contorno! Por cierto que es altura suficiente como para deslizar por debajo de ella una pelota de béisbol.



En realidad, la altura a la que se elevará la banda es la misma independientemente del tamaño que pueda tener la esfera. Es fácil comprender porqué. Cuando la banda está tensa alrededor de la esfera, es la circunferencia de un círculo con un radio que es el mismo que el radio de la esfera. Sabemos, a partir de la geometría plana, que la circunferencia de un círculo es igual a su diámetro (que es el doble de su radio) multiplicado por pi ( $\pi$ ). Pi es 3,14, un número ligeramente mayor que 3. Por lo tanto, si aumentamos la circunferencia de cualquier círculo en un metro, debemos incrementar el diámetro un poquito menos de un tercio de metro, es decir algo más

de 31 centímetros. Esto significa, por supuesto, que el radio aumentará en casi 16 centímetros.

Tal como muestra claramente la ilustración, este aumento del radio es la altura a la que se elevará la banda con respecto a la superficie de la esfera. Será exactamente la misma, 15,9 centímetros, independientemente de que la esfera sea tan grande como el sol o pequeña como una naranja.

## 2. La tercera línea

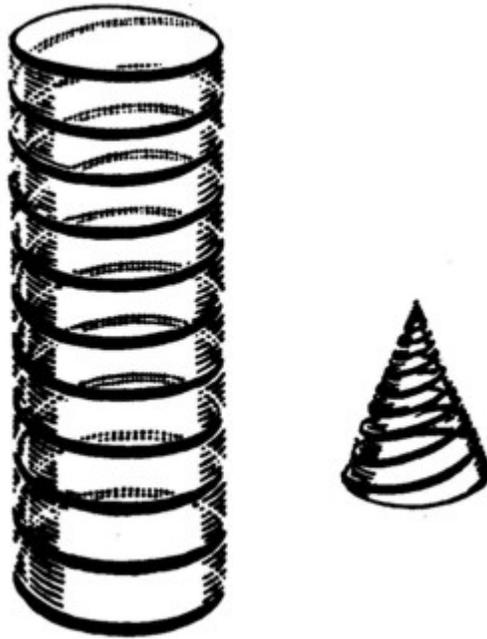
Una línea recta se dice que es auto-congruente porque cualquier porción de ella puede hacerse coincidir exactamente con cualquier otra porción de la misma longitud. Lo mismo ocurre con la circunferencia de un círculo. Cualquier parte de la circunferencia es exactamente igual que cualquier otra parte de la misma longitud. Una línea oval no es auto-congruente porque diferentes partes de ella tienen curvaturas diferentes. Una porción de óvalo sacada de uno de los lados no coincidirá con la porción más curvada de uno de los extremos.

Hay un tercer tipo de línea que es auto-congruente como la línea recta y el círculo. ¿Puedes decirme qué clase de línea es?

### Solución

Como este problema se halla dentro de la sección de geometría sólida, tal vez has adivinado que el tercer tipo de línea auto-congruente no puede dibujarse en el plano. Se llama hélice circular, una línea que describe una espiral en el espacio como un sacacorchos o como las rayas del poste de la peluquería. Si estudias la ilustración, verás que cualquier porción de esa hélice coincide con cualquier otra porción.

Hay otros tipos de hélices, pero sólo la hélice circular es auto-congruente. La hélice circular es la que describe una espiral de ángulo constante alrededor de un cilindro de sección circular. Otras hélices son las que describen espirales alrededor de cilindros de sección no circular, y alrededor de conos. Un resorte de colchón con forma de cono es un ejemplo familiar de hélice cónica. Las hélices tienen muchas propiedades interesantes, y se las halla frecuentemente en la física, la astronomía, la química, la biología y otras ciencias.



### 3. Los cubos pintados

Imagina que tienes una lata de pintura roja, una lata de pintura azul y una gran provisión de cubos de madera, todos del mismo tamaño. Deseas pintar los cubos de modo que cada cara sea toda roja o toda azul. Por ejemplo, puedes pintar un cubo todo de rojo. El siguiente puedes pintarlo con tres caras rojas y tres caras azules. Tal vez el tercer cubo también pueda ser pintado con tres caras rojas y tres azules, pero de tal manera que no sea igual que el segundo.

¿Cuántos cubos diferentes entre sí puedes pintar de esta manera? Dos cubos se consideran iguales si puede rotarse a uno de ellos de tal manera que todas sus caras sean de igual color que las caras correspondientes del otro cubo.

#### Solución

Puedes pintar:

1 cubo todo rojo.

1 cubo todo azul.

1 cubo con 5 caras rojas, 1 azul.

1 cubo con 5 caras azules, 1 roja.

2 cubos con 4 caras rojas, 2 azules

2 cubos con 4 caras azules, 2 rojas.

2 cubos con 3 caras rojas, 3 azules.

Esto hace un total de diez cubos diferentes.

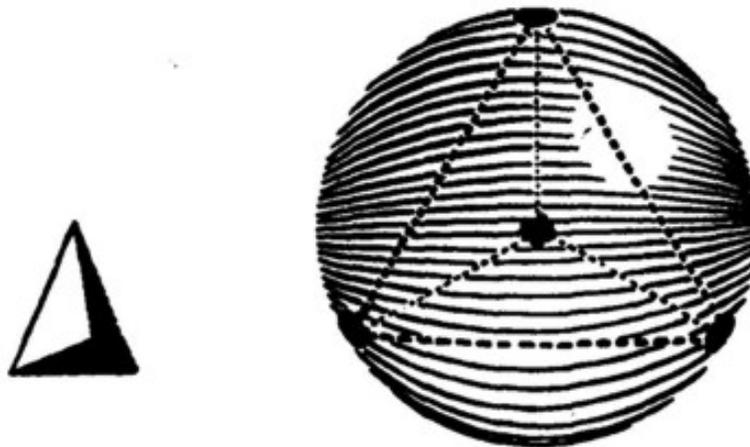
#### 4. La pelota de baloncesto moteada

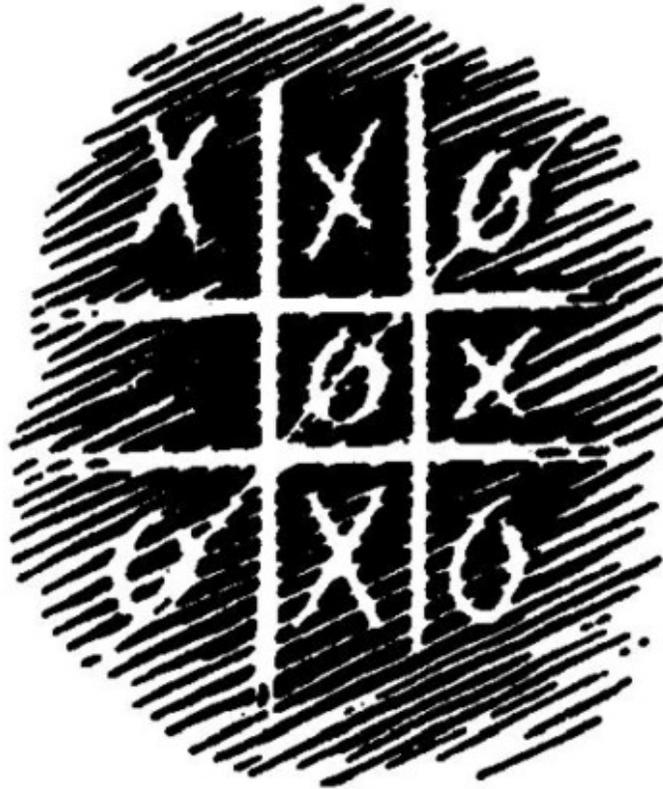
¿Cuál es el mayor número de puntos que puede dibujarse en una pelota de baloncesto de manera tal que cada punto quede a la misma distancia de todos los demás?

"Distancia" en este caso alude a la distancia medida sobre la superficie de la esfera. Una buena manera de trabajar sobre este problema consiste en marcar puntos sobre una pelota y medir la distancia entre ellos mediante un cordón.

#### Solución

No pueden pintarse más que cuatro puntos en una esfera si se desea que cada punto esté a la misma distancia de todos los demás. La ilustración muestra de qué modo están situados los puntos. Es interesante señalar que si dibujamos líneas rectas dentro de la esfera, que conecten los centros de los cuatro puntos, esas líneas marcarán los bordes de un tetraedro.





## Sección 6

### Acertijos con juegos.

#### Contenido:

1. [El círculo de monedas](#)
2. [El zorro y el ganso](#)
3. [Bridg-it](#)
4. [Nim](#)

¿Alguna vez te detuviste a pensar que en realidad hay muchísimos juegos que son acertijos matemáticos? El ta-te-tí, por ejemplo, es matemática pura. Es un juego tan simple que no resulta difícil analizarlo exhaustivamente y convertirse en un jugador que jamás comete un error. En la moderna teoría de juegos, una de las ramas más modernas de la matemática, se dice que un jugador así juega racionalmente. Cuando dos jugadores de ta-te-tí (en la variante de anotar "cruz" o "circulo", sin mover) juegan racionalmente, el resultado es siempre un empate.

Las damas y el ajedrez son otros dos ejemplos familiares de juegos matemáticos, pero hay tantas maneras diferentes de hacer movimientos que nadie ha logrado hasta ahora analizar por completo ninguno de ambos juegos. Si dos jugadores de damas o de ajedrez juegan racionalmente, ¿el juego terminará en un empate o acaso el jugador número 1 o el número 2 tendrán alguna manera segura de ganar? Nadie lo sabe. ¡Si alguien lo supiera, las damas y el ajedrez serían dos juegos mucho menos interesantes!

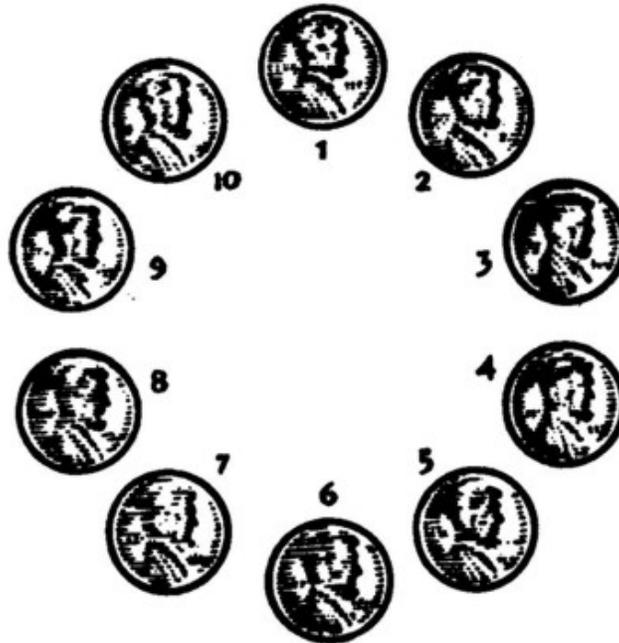
Los cuatro acertijos de esta sección son cuatro juegos novedosos que resultan fáciles de analizar y no pueden terminar en empate. Trata de jugar con algún amigo y observa con cuánta rapidez puedes descubrir la manera en que el primero o el segundo jugador pueden ganar siempre si juegan correctamente.

#### 1. El círculo de monedas.

Para jugar a este juego, toma cualquier número de fichas (pueden ser monedas, guijarros o pedacitos de papel) y disponlos en un círculo. La ilustración muestra el principio de un juego con diez monedas. Los jugadores se turnan para sacar una o dos fichas, pero si se sacan dos, éstas deben estar una junto a otra, sin que haya

entre ellas ninguna otra ficha o espacio vacío. La persona que saca la última ficha es la que gana.

Si ambos jugadores juegan racionalmente, ¿quién de los dos ganará y cuál estrategia deberá utilizar?



### Solución

El segundo jugador, si utiliza la siguiente estrategia de dos etapas, puede ganar siempre:

1. Después de que el primer jugador haya sacado una o dos fichas, quedará un único espacio vacío en alguna parte del círculo. El segundo jugador saca ahora una o dos fichas del lado opuesto del círculo de modo que las fichas queden divididas en dos grupos iguales.
2. De ahora en más, sea cual fuere la jugada que el primer jugador haga en un grupo, el segundo jugador tomará la o las fichas correspondientes del otro grupo. Esta estrategia se aclarará si juegas esta partida modelo. Los números se refieren a los asignados en la ilustración a cada una de las monedas.

**Primer jugador**

8

**Segundo jugador**

3

1, 2	5, 4
7	9
6	10 (gana)

Intenta esta estrategia al jugar con tus amigos y verás que el segundo jugador no puede dejar de ganar, independientemente de cuántas fichas se usen para formar el círculo.

## 2. El zorro y el ganso

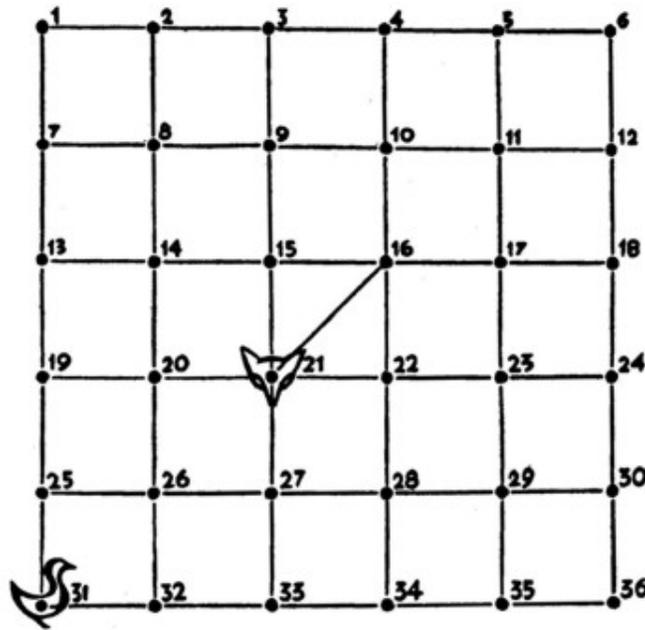
Este entretenido juego se juega en el tablero que muestra la ilustración.

Hay que poner dos fichas distintas entre sí en el lugar donde está el retrato del zorro y en el que está el retrato del ganso.

Un jugador mueve el zorro, el otro mueve el ganso. Una "movida" consiste en deslizar la ficha desde un punto hasta otro adyacente, siguiendo una línea negra. El zorro trata de capturar al ganso desplazándose hacia el punto ocupado por el ganso. Eso es lo que el ganso debe tratar de impedir que suceda. Si el zorro captura al ganso en diez movimientos o menos (es decir, en diez movimientos del zorro), gana. Si no logra capturarlo en diez movimientos, gana el ganso.

Ahora bien, si el ganso tuviera el primer turno, al zorro le resultaría muy fácil atraparlo en la esquina inferior izquierda del tablero. Pero en este juego el zorro siempre debe mover primero. Eso parece dar al ganso una buena oportunidad de escapar.

¿Puede el zorro capturar siempre al ganso en diez movimientos, si juega correctamente, o el ganso puede escapar en todos los casos?



**Solución**

El zorro puede siempre capturar al ganso en menos de diez movimientos. Así es como ocurre: Sus primeros tres movimientos deben hacerlo rodear uno de los dos triángulos que se hallan en el centro del tablero. Tras completar este circuito, es simple para él atrapar al ganso en un cuadrado de la esquina antes de acabar con sus diez movimientos.

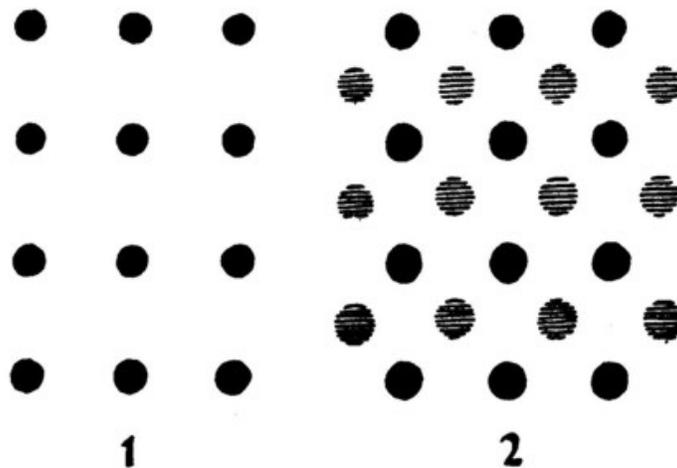
El Juego siguiente es típico:

Movimiento	Zorro	Ganso
1	16	32
2	22	33
3	21	27
4	22	33
5	28	32
6	27	31
7	26	25
8	25 (gana)	

### 3. Bridg - it

Este curioso juego fue inventado por David Gale, un profesor de matemática de la Universidad de Brown, y se ha comercializado bajo el nombre de Bridg-It. Puede jugarse en tableros de diversos tamaños. La versión que se explica aquí es fácilmente practicable sobre un papel, con lápices de dos colores diferentes. ¡Es más divertido que el ta-te-ti!

Supongamos que usas lápiz rojo y lápiz negro. Con el lápiz negro, haz un rectángulo de 12 puntos tal como se ve en la figura 1. Con el lápiz rojo, agrega doce puntos más como se ve en la figura 2. (En la ilustración, los puntos rojos están sombreados). La figura 2 es el tablero donde se juega la partida.



Uno de los jugadores tiene el lápiz negro, su oponente tiene el lápiz rojo. El primer jugador traza una línea vertical u horizontal que una dos puntos adyacentes de su propio color. Después el otro jugador hace exactamente lo mismo, uniendo dos puntos adyacentes del color que le corresponde a él. Hacen esto por turno. El negro trata de formar un camino continuo de líneas desde la fila superior de puntos negros hasta la fila inferior. Este camino no tiene que ser recto, puede virar en cualquier dirección siempre y cuando una los lados opuestos del tablero. El rojo trata de formar un camino similar desde la columna izquierda de puntos rojos hasta la derecha. Por supuesto que cada uno de ellos utiliza también sus líneas para bloquear el camino del otro jugador.

El jugador que complete primero el camino es el ganador. La figura 3 muestra el final de una partida típica. El rojo (cuyas líneas son de puntos) ha ganado. El juego no puede terminar en empate. ¿Quién ganará con seguridad, si juega racionalmente, el primero o el segundo jugador?

### **Solución**

Hay ciertas movidas de apertura que aseguran la victoria al primer jugador. Una de estas movidas consiste en conectar los dos puntos más próximos al centro del tablero. Hay demasiadas alternativas de juego como para discutir las todas aquí, pero este movimiento, con sucesivas jugadas cuidadosas, hará que el primer jugador gane.

Existe un modo interesante de probar que el primer jugador, independientemente de las dimensiones del tablero, puede ganar -siempre si juega correctamente:

Es así:

1. Supongamos, sólo para divertirnos, que el segundo jugador tiene una estrategia segura para ganar.
2. El primer jugador traza su primera línea en cualquier parte. Entonces, después de que el segundo jugador ha trazado su línea, el primer jugador finge ser el segundo jugador, y juega con su estrategia ganadora.
3. La línea que el primer jugador trazó en su primer movimiento no puede entorpecer su estrategia ganadora. Si esa línea no forma parte de su estrategia, entonces no tiene ninguna importancia. Si forma parte de la estrategia, entonces cuando llegue el momento de trazarla, lo que el primer jugador hace es trazar su línea en otra parte.
4. Por lo tanto, el primer jugador puede ganar siempre.
5. Pero esto contradice nuestra primera suposición, que afirmaba que el segundo jugador podía ganar. En consecuencia, esa suposición era errónea.
6. El juego no puede terminar en empate, de modo que si no existe una estrategia ganadora para el segundo jugador... debe existir una para el primer jugador!

Esta prueba, que es aplicable a otros juegos además del Bridg-It, es una prueba famosa de la teoría de juegos porque demuestra que existe una estrategia ganadora para el primer jugador, en un tablero de cualquier tamaño, pero no explica cuál es esa estrategia. La prueba no es fácil de comprender cuando se la explica tan sumariamente como aquí, pero si la piensas cuidadosamente, acabará por resultarte clara. Los matemáticos la llaman prueba de existencia porque demuestra que algo existe sin decir cómo descubrirlo.

En este caso, el tipo de razonamiento utilizado se conoce como *reductio ad absurdum*, que es la expresión latina por "reducción al absurdo". Se demuestra que una de dos cosas debe ser verdadera, se supone que una de ellas es verdadera, pero eso conduce a un absurdo lógico, por lo cual la otra cosa debe ser la verdadera. En este caso la prueba se desarrolla de la siguiente manera:

1. uno de los dos jugadores debe ganar,
2. se supone que es el segundo jugador el que puede ganar siempre,
3. esto conduce a una contradicción lógica,
4. en consecuencia, es el primer jugador el que puede ganar siempre.

Es ésta una poderosa forma de demostración que los matemáticos usan con frecuencia.

#### **4. Nim**

Distribuye nueve monedas en tres filas como se ve en la ilustración. Los jugadores, por turnos, deben sacar una o más monedas siempre que todas pertenezcan a la misma fila. Por ejemplo, un jugador podría sacar una moneda de la fila superior, o todas las monedas de la fila inferior. La persona que se ve obligada a tomar la última moneda, pierde.

Si el primer jugador hace un primer movimiento correcto, y si sigue racionalmente, puede ganar siempre. Si no hace ese primer movimiento correcto, su oponente, jugando racionalmente, puede ganar en todos los casos.



¿Puedes descubrir cuál es ese primer movimiento?

### Solución

La única manera en la que el primer jugador puede estar seguro de que ganará es sacando tres monedas de la fila inferior en su primer movimiento.

Cualquier partida que deje uno de los siguientes esquemas de monedas, ganará con toda seguridad:

1. Una moneda en cada una de las tres filas.
2. Dos monedas en cada una de dos filas.
3. Tres monedas en cada una de dos filas.
4. Una moneda en una fila, dos en otra, tres en una tercera.

Si tienes presente estos cuatro esquemas ganadores, podrás derrotar a un jugador inexperto cada vez que te toque mover primero, así como cada una de las veces que él mueva primero y no haga el movimiento correcto de apertura. Nim puede jugarse con cualquier número de fichas dispuestas en cualquier número de filas. El juego ha sido completamente analizado por medio de la utilización del sistema binario de la aritmética.

Se creyó en una época que era de origen chino, pero el nombre "Nim" le fue dado en 1901 por Charles Leonard Bouton, un profesor de matemática de la universidad de Harvard, que fue el primero en realizar su análisis completo. "Nim" es una palabra inglesa obsoleta que significa "robar o llevarse".



## Sección 7

### Acertijos de probabilidades.

#### **Contenido:**

1. [Las tres monedas](#)
2. [La décima tirada](#)
3. [Apostando a los reyes](#)
4. [Varones contra mujeres](#)

Todo lo que hacemos, todo lo que ocurre a nuestro alrededor, obedece a las leyes de las probabilidades. No podemos escaparnos de ellas, de la misma manera que no podemos escaparnos de la ley de gravedad. Suena el teléfono. Lo contestamos porque pensamos que alguien ha discado nuestro número, pero siempre existe una posibilidad de que el que llama haya discado el número equivocado por error. Abrimos un grifo porque creemos que es probable que de él salga agua, pero tal vez no salga. "La probabilidad", dijo una vez un filósofo, "es la guía de la vida". Somos todos jugadores que pasamos por la vida haciendo incontables apuestas acerca de los resultados de incontables acciones.

La teoría de las probabilidades es esa rama de la matemática que nos dice cómo estimar los grados de probabilidad. Si es seguro que un acontecimiento se producirá, su grado de probabilidad es 1. Si es seguro que no se producirá, su grado de probabilidad es 0. Todas las otras probabilidades que se sitúan entre 1 y 0 se expresan con fracciones. Si es tan probable que un acontecimiento se produzca como que no se produzca, decimos que su grado de probabilidad es  $1/2$ . En todos los campos de la ciencia se utiliza la estimación de probabilidades. Un físico calcula el probable trayecto de una partícula. Un genetista calcula las probabilidades de que una pareja tenga un hijo de ojos azules. Las aseguradoras, los comerciantes, los agentes de bolsa, los sociólogos, los políticos, los expertos militares... todos ellos deben ser expertos en calcular la probabilidad de los sucesos que les conciernen.

## 1. Las tres monedas

Joe: «Voy a arrojar tres monedas al aire. Si todas caen cara, te daré diez centavos. Si todas caen cruz, te daré diez centavos. Pero si caen de alguna otra manera, tú me das cinco centavos a mí.»

Jim: "Déjame pensarlo un minuto. Al menos dos monedas tendrán que caer igual porque si hay dos diferentes, la tercera tendrá que caer igual que una de las otras dos. (Ver el problema de los soquetes de colores de la primera sección de este libro). Y si hay dos iguales, entonces la tercera tendrá que ser igual o diferente de las otras dos. Las probabilidades están parejas con respecto a que la tercera moneda sea igual o diferente. Por lo tanto, hay las mismas probabilidades de que las monedas muestren el mismo lado, como que no. Pero Joe está apostando diez centavos contra cinco que no serán todas iguales, de modo que las probabilidades están a mi favor. ¡Bien, Joe, acepto la apuesta!"

¿Fue bueno para Jim haber aceptado la apuesta?

### Solución

No es muy bueno para Jim haber aceptado esa-apuesta. Su razonamiento de la situación es completamente erróneo.

Para descubrir las probabilidades de que las tres monedas caigan de la misma manera o no, primero debemos consignar todas las maneras en las que las tres monedas pueden caer. Hay ocho maneras, que se ven en la ilustración. Con una A está indicado "cara" y con una Z, "cruz".

Cada una de estas maneras tiene tanta probabilidad de darse como cualquiera de las otras. Advierte que sólo dos de ellas muestran todas las monedas iguales. Esto significa que las probabilidades de que todas las monedas caigan iguales son de dos sobre ocho, ó  $2/8$ , fracción que puede simplificarse a  $1/4$ .

Hay seis maneras en las que las monedas pueden caer sin ser iguales. Por lo tanto, las posibilidades de que esto ocurra son de  $6/8$  ó  $3/4$ .



En otras palabras, Joe espera, a la larga, ganar tres veces de cada cuatro. Por esas veces, Jim tendrá que pagarle quince centavos... Pero la vez que Jim ganará, Joe le pagará diez centavos. Esto da a Joe un beneficio de cinco centavos cada cuatro tiros -buen beneficio si la apuesta se repite varias veces.

## 2. La décima tirada

Un dado común (como los que se usan en juegos de azar) tiene seis caras, de modo que la probabilidad de que aparezca alguna de ellas es uno sobre seis, ó  $1/6$ . Supongamos que tiras un dado nueve veces. Cada una de ellas cae con la cara del 1 hacia arriba.



¿Cuál es la probabilidad de que la cara del 1 vuelva a aparecer en la tirada siguiente? ¿Es más de  $1/6$  o sigue siendo  $1/6$ ?

### **Solución**

Si sabemos positivamente que el dado no está cargado, entonces no importa cuántas veces se lo tire ni qué es lo que aparece, la probabilidad de la siguiente tirada seguirá siendo de  $1/6$  para cada una de las seis caras. ¡Un dado no tiene manera de recordar las tiradas anteriores!

A mucha gente le resulta difícil creerlo. Toda clase de necios sistemas para jugar a la ruleta y otros juegos de azar se basan en la superstición de que cuanto más frecuentemente algo ocurre por azar, menos probable será que se repita. Los soldados, durante la Primera Guerra Mundial, pensaban que si se escondían en los agujeros recientemente hechos por las granadas estarían más seguros que si se ocultaban en los viejos, porque, razonaban, era poco probable que una granada explotara dos veces en el mismo sitio en tan poco tiempo. Una madre con cinco hijos, todas nenas, cree que las probabilidades de que el próximo sea varón son mejores de  $1/2$ . Estas creencias son infundadas.

Ahora veamos la otra cara de la cuestión. Al arrojar un dado real, es difícil estar seguro de que no es un dado cargado, o tal vez controlado por imanes ocultos. De modo que si en las primeras nueve tiradas nos sale un as, tenemos buenas razones para sospechar que ese dado es lo que las estadísticas llaman un dado tendencioso. Por lo tanto, la probabilidad de que salga otro as en la décima tirada es mayor que  $1/6$ !

### 3. Apostando a los reyes

Hay seis naipes boca abajo en la mesa. Te han dicho que dos y sólo dos entre ellos son reyes, pero no sabes en qué posición están.



Eliges dos cartas al azar y las pones boca arriba.

¿Qué es más probable?

1. Que haya al menos un rey entre esas dos cartas
2. Que no haya ningún rey entre esas dos cartas

#### Solución

Para resolver este problema, numeremos los seis naipes de 1 a 6, y supongamos que los naipes 5 y 6 son los dos reyes.

Hagamos ahora una lista de las diferentes combinaciones de dos cartas que pueden resultar de la elección. Hay 15 combinaciones posibles:

1-2	2-3	3-4	4-5	5-6
1-3	2-4	3-5	4-6	
1-4	2-5	3-6		
1-5	2-6			

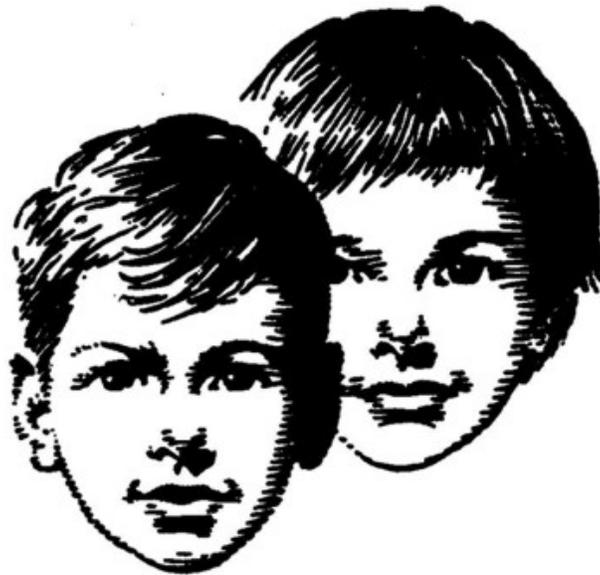
1-6

Advierte que los reyes (naipes 5 y 6) aparecen en nueve de los 15 pares. Como un par es tan probable como otro, esto significa que, a la larga, sacarás un rey en nueve de cada quince intentos. En otras palabras, la probabilidad de sacar un rey es de  $9/15$ , una fracción que puede simplificarse a  $3/5$ . Por supuesto, esto es mejor que  $1/2$ , de modo que la respuesta es que es más probable que uno saque al menos un rey y no ninguno.

¿Cuáles son tus probabilidades de sacar ambos reyes al dar vuelta dos naipes? Sólo una de las quince combinaciones contiene a ambos reyes, de modo que la respuesta es  $1 / 15$ .

#### 4. Varones contra mujeres.

George Gamow y Marvin Stern, en su estimulante librito, Puzzle-Math, cuentan acerca de un sultán que pensó en aumentar el número de mujeres de su país, con respecto al número de hombres, para que los hombres pudieran tener harenes más grandes. Para lograr su propósito, formuló la siguiente ley: en cuanto una madre de a luz su primer hijo varón, se le prohibirá tener más niños.



De esta manera, argumentaba el sultán, algunas familias tendrían varias mujeres y sólo un varón, pero ninguna familia podría tener más de un varón. No pasaría mucho tiempo sin que el número de mujeres fuera mayor que el de varones.

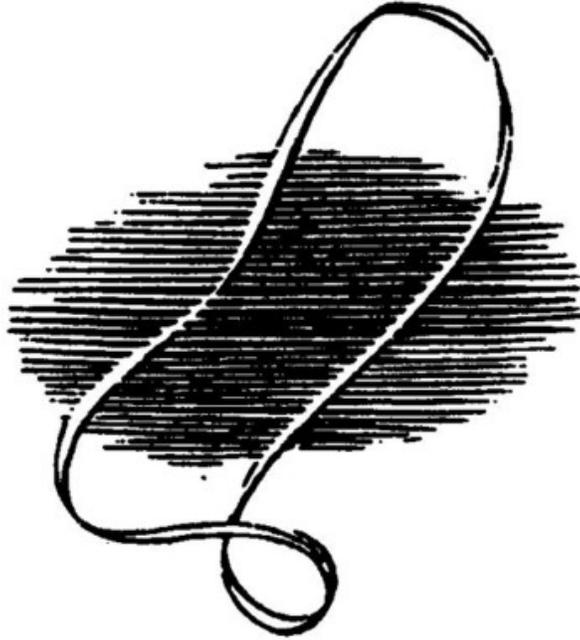
¿Crees que la ley del sultán dará resultados?

### **Solución**

No, la ley del sultán no dará resultados. Obedeciendo las leyes del azar, el primer niño recién nacido a todas las mujeres tendrá tantas posibilidades de ser varón como de ser mujer. Las madres de varones no tendrán más hijos. Las madres de mujeres tendrán entonces sus segundos hijos, y otra vez la probabilidad se repartirá equitativamente entre mujeres y varones. Una vez más, las madres de varones no podrán tener más hijos, y las otras, madres de mujeres, tendrán una tercera oportunidad. En cada una de esas oportunidades, la cantidad de mujeres tenderá a ser igual que la cantidad de varones, de modo que la proporción existente entre varones y mujeres jamás cambiará.

“Ya ven”, escriben Gamow y Stern en la respuesta que dan al problema del sultán, “que la proporción se mantiene. Como en cada turno de nacimientos la proporción de varones y mujeres es de uno a uno, cuando se suman los resultados de todos los turnos, se observará que esa proporción sigue siendo de uno a uno.”

Pos supuesto que mientras todo esto ocurra, las niñas crecerán y se convertirán también en madres, pero a ellas se les aplica de todos modos la misma argumentación.



## Sección 8

### Acertijos topológicos

#### **Contenido:**

1. [Los cinco ladrillos](#)
2. [¿Adentro o afuera?](#)
3. [Los dos nudos](#)
4. [Dando vuelta el sweater](#)

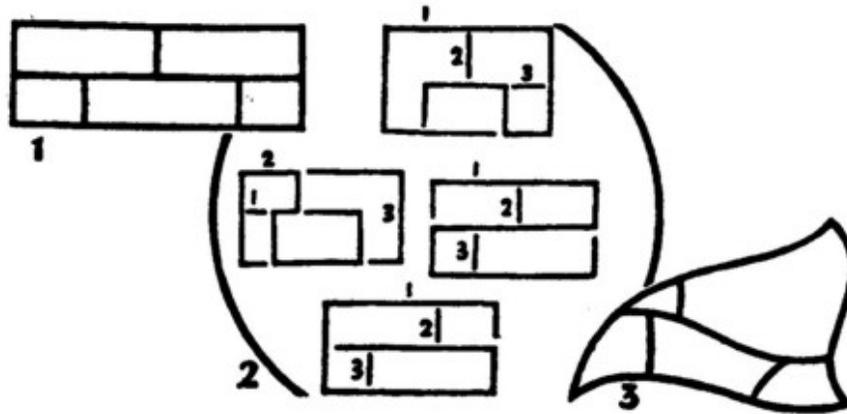
La topología es una de las ramas más nuevas y complejas de la geometría moderna. Algunas de sus curiosas figuras, superficies de un solo lado, botellas cerradas sin "adentro", tubos interiores que se dan vuelta como un guante, son tan extrañas que parecen haber sido inventadas por escritores de ciencia ficción y no por matemáticos de mente sobria.

¿Qué es la topología? Es el estudio de propiedades que permanecen invariables independientemente de la manera en la que se retuerza, extienda o comprima una figura. Para un topólogo, un triángulo es lo mismo que un círculo porque si imaginamos que ese triángulo está hecho con hilos, podemos con toda facilidad estirar ese hilo hasta formar un círculo. Supongamos que tenemos un anillo (un topólogo lo llama toro) hecho de una sustancia plástica que puede moldearse de cualquier manera que se nos antoje, pero que no se pega ni puede romperse. Puedes pensar que no quedará ninguna característica original del anillo si lo estiramos, lo doblamos y deformamos lo suficiente. Pero hay muchas características que sobrevivirán. Por ejemplo, siempre tendrá un agujero. Esas propiedades invariables son las propiedades topológicas. No tienen nada que ver con el tamaño, ni con la forma en el sentido en el que habitualmente se entiende la forma. Son las más profundas de todas las propiedades geométricas.

Hay muchos acertijos de naturaleza topológica. Los siguientes son cuatro de los mejores.

## 1. Los cinco ladrillos.

Este es uno de los más antiguos y famosos acertijos topológicos. Es posible que tu abuelo haya intentado resolverlo en la escuela mientras se suponía que estudiaba su libro de historia. Sin embargo, no hay ni una persona entre mil que sepa con seguridad si puede o no resolverse.

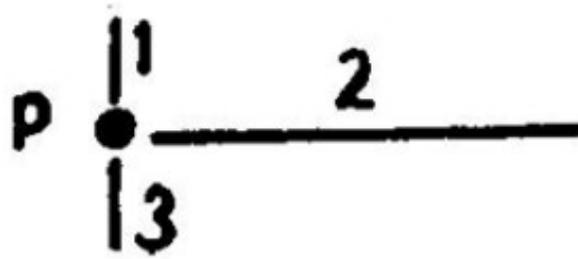


El problema es éste: ¿Puedes dibujar el diagrama de la figura 1 con tres trazos? No se permite pasar dos veces por la misma línea. Es fácil dibujar toda la figura salvo un pequeño segmento (se muestran algunos intentos en la figura 2), pero, ¿es posible dibujar toda la figura con tres trazos? Si no es posible, ¿por qué?

El acertijo es topológico porque las dimensiones y formas reales de los ladrillos no tienen importancia. Por ejemplo, si distorsionamos la figura tal como se ve en la figura 3, el problema sigue siendo exactamente el mismo. Cualquier solución para la figura 1 sería también una solución para la figura 3, y viceversa.

### Solución

Es imposible dibujar los cinco ladrillos con tres trazos; hay una manera simple de probarlo. Cuando tres segmentos de línea se reúnen en un punto, como lo muestra la figura 4, es obvio que ese punto debe señalar el final al menos de un trazo. También podría ser el final de tres trazos, pero eso no nos interesa. Sólo nos importa el hecho de que al menos una línea debe terminar en el punto P de la ilustración.



Cuenta el número de puntos de la figura 1, que muestra los ladrillos, donde se unen tres segmentos de líneas. Hay ocho puntos de éstos. Cada uno de ellos debe señalar el final de al menos un trazo, de modo que la figura completa contiene como mínimo ocho finales de trazos. Ningún trazo puede tener más de dos extremos, por lo que la figura no puede dibujarse con menos de cuatro trazos.

Este es un ejemplo simple de lo que los matemáticos llaman una prueba de imposibilidad. Con mucha frecuencia, en la historia de las matemáticas, se desperdicia una gran cantidad de tiempo intentando resolver un problema, como el de trisecar un ángulo con sólo un compás y una regla, que no tiene solución. Por eso es muy importante investigar las pruebas de imposibilidad. Otro excelente ejemplo de ese tipo de prueba se encontrará en el acertijo de los cinco tetrominós de la sección siguiente.

## 2. ¿Adentro o afuera?

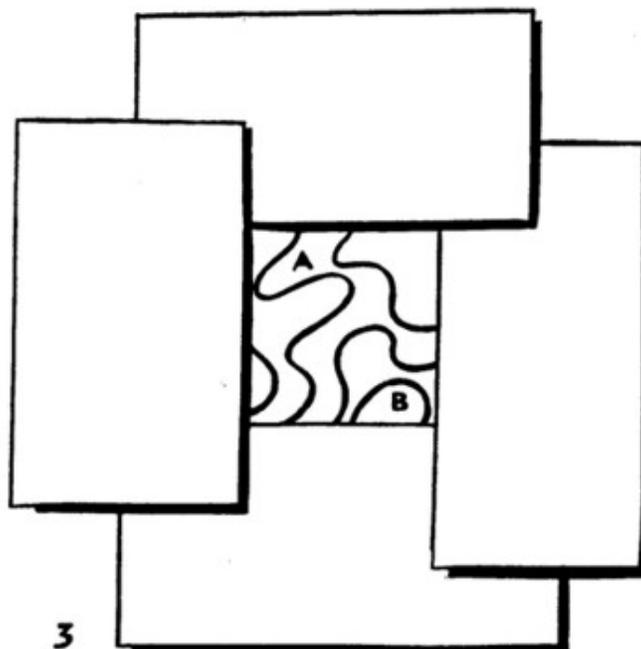
Uno de los teoremas fundamentales de la topología es el teorema de la curva de Jordan (Así llamado por el matemático francés Camille Jordan). Este teorema postula que cualquier curva simple cerrada (una curva unida en los extremos y que no se cruza a sí misma) divide la superficie del plano en dos regiones, un adentro y un afuera (figura 1). El teorema parece bastante obvio, pero en realidad es de difícil demostración.



Si trazamos una curva simple cerrada muy sinuosa, como la que muestra la figura 2, no es fácil decir de inmediato si cierto punto, como el señalado por medio de la crucecita, está adentro o afuera. Por supuesto que podemos descubrirlo si seguimos con un lápiz el trayecto desde este punto hasta el borde de la curva para ver si conduce o no afuera.

La figura 3 muestra sólo una pequeña porción interior de una curva simple cerrada. El resto de la curva, por los cuatro lados, está oculta a la vista por hojas de papel, de modo que no hay manera de seguir con el lápiz el trayecto que va desde las regiones visibles hasta el borde de la curva, para ver si conduce o no afuera. Se nos dice que la región marcada como A está adentro de la curva.

¿La región B está adentro o afuera, y cómo lo sabes?

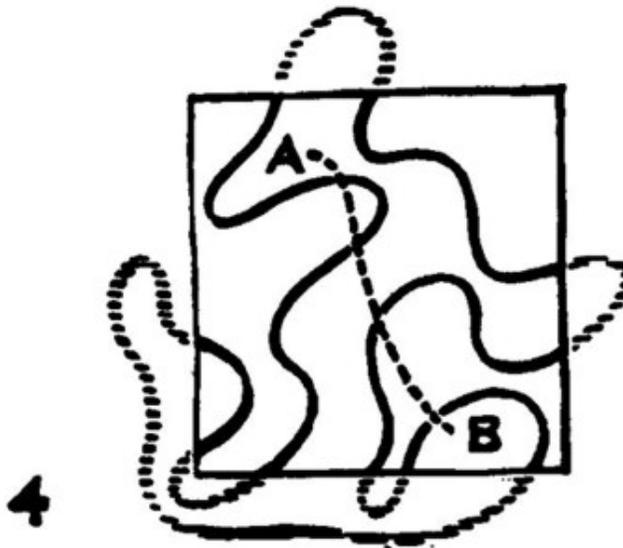


## Solución

La región B está adentro.

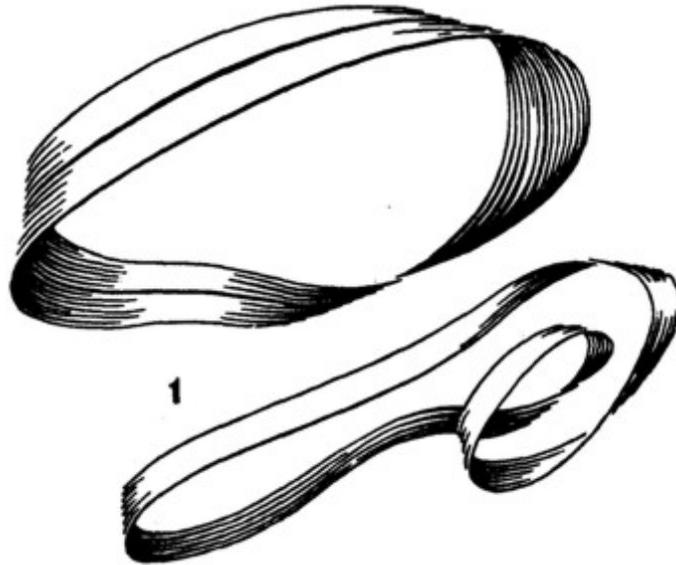
Esto puede decirse a causa de otro interesante teorema acerca de las curvas simples cerradas. Todas las regiones de "adentro" de esas curvas están separadas entre sí por un número par de líneas. Lo mismo es cierto en el caso de todas las regiones de "afuera". Y cualquier región de adentro está separada de cualquier región de afuera por un número impar de líneas. El cero se considera número par, de modo que si no hay líneas entre dos regiones, por cierto que éstas serán parte del mismo "lado", y nuestro teorema seguirá siendo válido.

Cuando pasamos de cualquier parte de la región A a cualquier parte de la región B, por cualquier camino, cruzamos un número par de líneas. En la figura 4 se muestra uno de esos caminos por medio de una línea de puntos. Como ves, cruza cuatro líneas, un número par. De modo que podemos decir con certeza que, sin importar cómo sea el resto de la línea, la región B también está adentro!



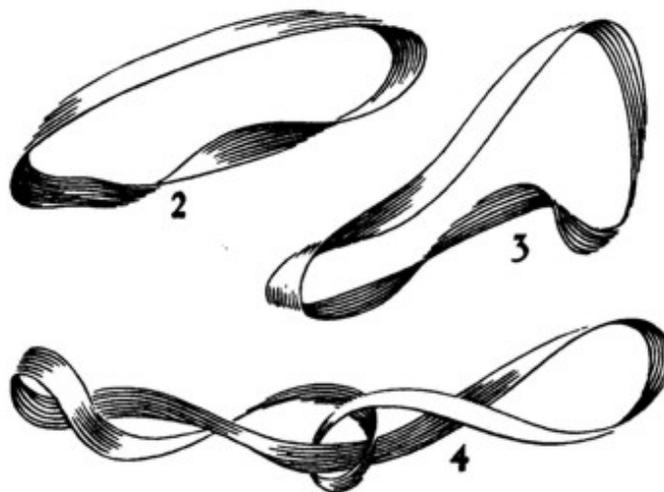
## 3. Los dos nudos

Actualmente mucha gente sabe qué es la cinta de Moebius. Es una cinta de papel retorcida media vuelta antes de pegar los extremos, como muestra la figura 1. Tiene un solo lado y un solo borde.



Mucha gente sabe también que si uno trata de cortar una cinta de Moebius por la mitad, cortando a lo largo por el medio de la cinta, no se formarán dos cintas como uno esperaba que ocurriera. Se abre en una cinta larga. Y si se empieza a cortar a un tercio del borde, puede cortarse dos veces alrededor de la cinta para lograr una cinta larga que tiene unida a ella, como un eslabón, otra más corta.

Si la cinta se retuerce dos medias vueltas antes de engomar los extremos (figura 2), un corte por el medio dará dos cintas del mismo tamaño, pero enlazadas. ¿Qué ocurre si cortas una cinta retorcida tres medias vueltas? (figura 3). ¡Esta vez obtendrás una cinta larga con un nudo! (figura 4).



Hay dos maneras de hacer una cinta con un retorcimiento de tres medias vueltas. Podemos retorcerla en el sentido de las agujas del reloj o en sentido opuesto a las agujas del reloj. En ambos casos, si cortamos la cinta, formamos un nudo. Ahora la pregunta: ¿son esos dos nudos exactamente iguales?

### **Solución**

A primera vista, se puede suponer que los dos nudos son iguales, pero si se los examina con mayor detenimiento, se advertirá una curiosa diferencia. Un nudo es la imagen en espejo del otro. No importa cómo tratemos de alterar la forma de un nudo, jamás lograremos que sea exactamente igual al otro.

Las estructuras geométricas que no son idénticas a sus imágenes especulares son llamadas asimétricas. Cuando hicimos las dos cintas, retorciendo una en una dirección y la otra en dirección opuesta, formamos dos cintas asimétricas, cada una de las cuales es la imagen especular de la otra. Esta asimetría pasa a la asimetría de los dos nudos que resulten al cortarlas.

Estamos tan habituados a atar nudos de la misma manera que no advertimos que hay dos modos muy diferentes de atarlos. Tal vez las personas zurdas tienden a atarlos de una manera y las diestras de otra manera. Si es así, Sherlock Holmes hubiera tenido una buena manera de deducir, a partir del modo en que el criminal ató a su víctima, si ese criminal era zurdo o diestro.

### **4. Dando vuelta el sweater.**

Imagina que tienes las muñecas atadas con un pedazo de sogá, tal como se ve en la ilustración, y un sweater de cuello cerrado.



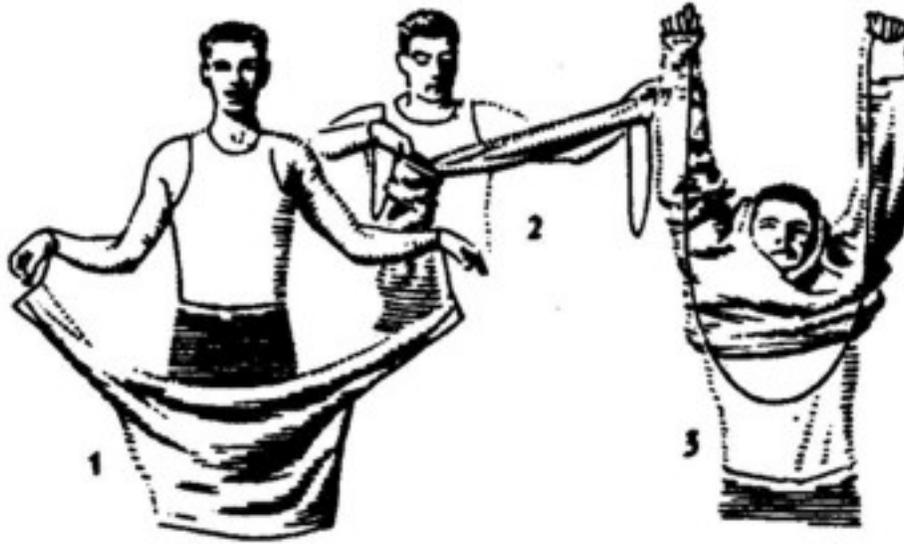
¿Hay alguna manera de que puedas quitarte el sweater, darlo vuelta del revés y volvértelo a poner? Recuerda que el sweater no tiene botones y que no puedes cortar ni desatar la soga.

### **Solución**

Sí, el sweater puede darse vuelta del revés de la siguiente manera:

1. Pásalo por encima de tu cabeza, volviéndolo del revés mientras lo haces y déjalo colgar, al revés, sobre la soga, como se ve en la figura 1.
2. Vuelve a dar vuelta el sweater pasándolo por una de las mangas. Ahora cuelga de la cuerda con el lado bueno para afuera (figura 2).
3. Vuelve a ponértelo pasándolo por la cabeza., invirtiendo todas las acciones que te permitieron quitártelo. Esto vuelve a dejar el sweater del revés, y te lo deja puesto con el lado interno hacia afuera.

Antes de intentarlo, ve si puedes visualizar el proceso mentalmente. Si tu sweater tiene la inicial de tu escuela cosida en la parte delantera, ¿esta letra te tocará el pecho o la espalda cuando hayas acabado con los tres pasos?



## Sección 9

### Acertijos misceláneos.

#### **Contenido:**

1. [Los cinco tetrominós](#)
2. [Las dos tribus](#)
3. [Sin tiempo para la escuela](#)
4. [Tiempo de tostadas](#)
5. [Las tres corbatas](#)

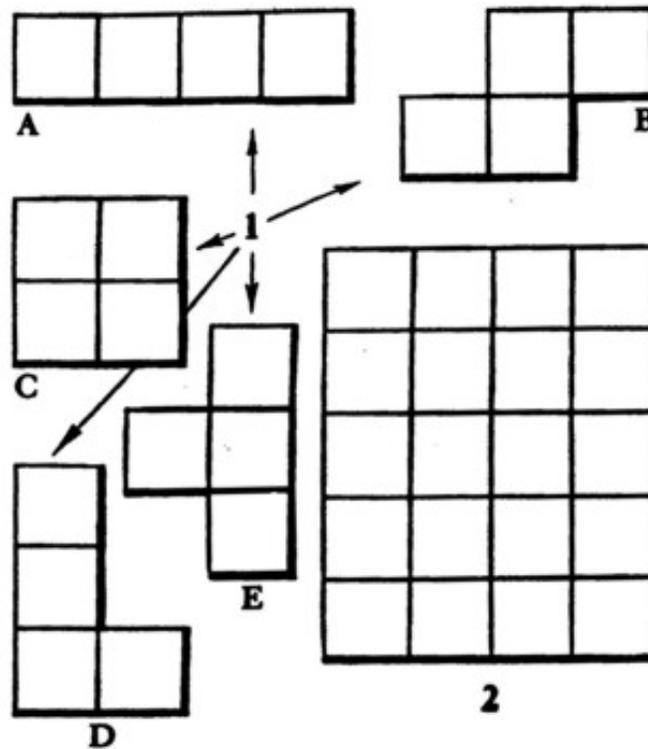
Hay tantas ramas diferentes de la matemática que, si incluimos un problema extraído de cada una de ellas, este libro sería cincuenta veces más extenso de lo que es. Los cinco acertijos siguientes no corresponden muy bien a ninguna de las secciones previas, pero se incluyen aquí porque son especialmente interesantes y porque introducen importantes ideas matemáticas.

El primer acertijo involucra una rama de la geometría llamada geometría combinatoria. Demuestra cómo hacer una suerte de acertijo de encastre que ha despertado el interés de muchos matemáticos de primer nivel. El segundo y el quinto acertijos involucran la lógica. Desde la época de Aristóteles hasta hace un siglo, la lógica era considerada parte de la filosofía; ahora se la considera el estudio de las leyes más fundamentales de la matemática. El tercer acertijo señala una divertida trampa del campo de la matemática llamado estadística

El cuarto acertijo demuestra de qué modo el razonamiento matemático puede incrementar con frecuencia la eficiencia del trabajo, incluso del trabajo de una persona que está tomando el desayuno. Actualmente, la aplicación de la matemática a la industria y a la estrategia bélica, para lograr que sean más eficientes, es conocida con el nombre de investigación operativa. Es uno de los campos de la matemática que se desarrolla con mayor rapidez.

### 1. Los cinco tetrominós.

Dibuja las cinco formas que muestra la figura 1 sobre un papel rígido o sobre cartón, y recórtalas. ¿Puedes acomodarlas como para formar el rectángulo de 4 x 5 que aparece en la figura 2? Las piezas pueden rotarse y ponerse con cualquier lado hacia arriba.



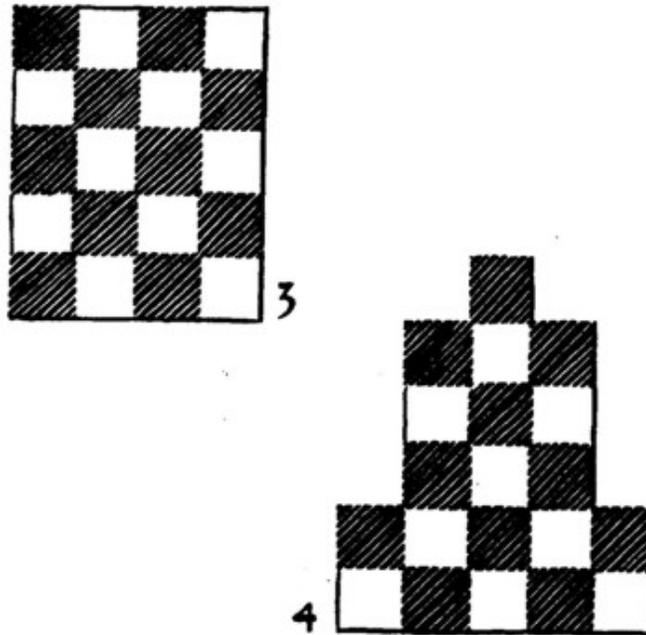
Esas cinco formas se llaman tetrominós. Un dominó se forma juntando dos cuadrados pequeños. Los tetrominós se forman con la unión de cuatro cuadrados pequeños. Las formas constituidas por tres cuadrados se llaman *triminós*, y las que están constituidas por cinco cuadrados se llaman *pentominós*.

El nombre general de esas formas es *poliominós*. Hay cientos de acertijos interesantes que se basan en ellas.

### Solución

No hay manera de resolver este acertijo. Tal vez te convenciste de ello después de haber intentado mucho tiempo formar el rectángulo, pero sin ningún éxito. Sin embargo, un matemático jamás se contenta con la simple sospecha de que algo es

imposible. Quiere probarlo. En este caso, hay un medio sorprendentemente simple de hacerlo.



Primero colorea los pequeños cuadrados del rectángulo de modo que parezca un tablero de ajedrez (figura 3). Si intentas situar los tetrominós A, B, C, y D sobre este tablero, verás que, los sitúes cómo los sitúes, cada uno debe cubrir dos cuadrados negros y dos blancos. Los cuatro en conjunto, entonces, deben cubrir un área total de ocho cuadrados blancos y ocho cuadrados negros.

Esto no ocurre, sin embargo, en el caso del tetrominó E. Siempre cubre tres cuadrados de un color y un cuadrado del otro color.

El rectángulo tiene diez cuadrados blancos y diez cuadrados negros. No importa dónde situemos los tetrominós A, B, C y D, tendremos que cubrir ocho cuadrados de cada color. Esto dejaría sin cubrir dos cuadrados blancos y dos cuadrados negros para el tetrominó E. Pero E no puede cubrir dos cuadrados blancos y dos negros. En consecuencia, el acertijo no tiene solución.

La figura 4 muestra una figura con la forma de un rascacielos, en la que hay dos cuadrados negros más que cuadrados blancos, de modo que nuestra prueba de imposibilidad ya no se aplica en este caso. Intenta formar esta figura con tus cinco piezas. ¡Esto sí es posible!

## 2. Las dos tribus.

Una isla está habitada por dos tribus. Los miembros de una tribu siempre dicen la verdad, los miembros de la otra tribu mienten siempre.



Un misionero se encontró con dos de estos nativos, uno alto y otro bajo.

- ¿Eres de los que dicen la verdad?, preguntó al más alto.

- Upf, respondió el nativo alto.

El misionero reconoció la palabra como el término nativo que significa sí o no, pero no podía recordar cuál de los dos. El nativo bajo hablaba español, así que el misionero le preguntó qué era lo que había dicho su compañero.

- Dijo sí, replicó el nativo bajo, ¡pero él ser gran mentiroso!

¿A qué tribu pertenecía cada uno de los nativos?

### Solución

Cuando el misionero preguntó al nativo alto si era de los que decían la verdad, la respuesta "Upf " debe significar "sí". Si el nativo es de la tribu de los que dicen la verdad, debe decir la verdad y responder que sí; si es uno de los mentirosos, debe mentir, ¡pero la respuesta seguiría siendo sí!

De modo que cuando el nativo más bajo dijo al misionero que su compañero había dicho "sí", estaba diciendo la verdad. En consecuencia, también debe haber dicho la verdad cuando agregó que su amigo era un mentiroso.

Conclusión: el hombre alto es mentiroso, el bajo es de la tribu de los que dicen la verdad.

### 3. Sin tiempo para la escuela.

- Pero no tengo tiempo para la escuela, explicaba Eddie al preceptor. Duermo ocho horas diarias que, sumadas, dan 122 días por año, suponiendo que cada día es de 24 horas. No hay clases los sábados ni los domingos, que suman 104 días por año. Tenemos 60 días de vacaciones de verano. Necesito tres horas diarias para comer... esto es más de 45 días al año. Y necesito al menos dos horas diarias de recreación... que suman más de 30 días al año."

Eddie escribió estas cifras mientras hablaba, después sumó todos los días. La suma daba 361.

Sueño (8 horas diarias)	122
Sábados y domingos	104
Vacaciones de verano	60
Comidas (3 horas diarias)	45
Recreación (2 horas diarias)	30
<b>Total</b>	<b>361 días</b>

- Ya ve, continuó Eddie; eso me deja tan sólo cuatro días para estar enfermo y en cama, y ni siquiera he tomado en cuenta los siete feriados escolares que tenemos cada año.

El preceptor se rascó la cabeza.

- Algo no anda bien aquí, murmuró.

Pero por más que se esforzó, no pudo encontrar nada equivocado en las cifras de Eddie. ¿Puedes explicar dónde está el error?

### Solución

La trampa de las cifras de Eddie es que las categorías de tiempo se superponen de modo que los mismos períodos de tiempo se cuentan más de una vez. Para dar un ejemplo, durante su período de vacaciones de 60 días también comió y durmió. El tiempo de comer y dormir se cuenta en el periodo de vacaciones y también aparte, en el tiempo insumido para comer y dormir durante todo el año.

La falacia de superponer categorías es muy común en las estadísticas, especialmente en el caso de las estadísticas médicas. Podemos leer que en ciertas comunidades, el 30 por ciento de las personas tienen una deficiencia de vitamina A, el 30 por ciento tiene deficiencia de vitamina B, y el 30 por ciento tiene deficiencia de vitamina C. Si a partir de esto sacamos la conclusión de que sólo el 10 por ciento de la población no tiene deficiencia de estas tres vitaminas, habremos realizado el mismo razonamiento defectuoso que Eddie utilizó en su charla con el preceptor: Es posible que el 30 por ciento de la población tenga deficiencias de las tres vitaminas, lo que dejaría al 70 por ciento de la población en la categoría de los que no tienen ninguna deficiencia.

#### **4. Tiempo de tostadas.**

Los Smith tienen una anticuada tostadora que sólo admite dos rebanadas de pan por vez y que tuesta sólo un lado de la rebanada por vez. Para tostar el otro lado, hay que sacar las rebanadas, darles vuelta y volverlas a poner en la tostadora. La tostadora demora exactamente un minuto para tostar un lado de cada rebanada de pan que contenga.



Una mañana, la señora Smith deseaba tostar ambas caras de tres rebanadas. El señor Smith la observaba por encima de su periódico y sonrió al ver el procedimiento de su esposa. Demoró cuatro minutos.

- Podrías haber tostado esas tres rebanadas en menos tiempo, querida, dijo, y hubieras gastado menos electricidad.

¿Tenía razón el señor Smith, y si así fuera, cómo podría haber tostado su esposa esas tres rebanadas en menos de cuatro minutos?

### **Solución**

Es simple tostar las tres rebanadas, de ambos lados, en tres minutos. Llamemos A, B y C a las rebanadas. Cada una de ellas tiene la cara 1 y la cara 2. El procedimiento es éste:

Primer minuto: Tostar caras A-1 y B-1. Quitar las rebanadas, dar vuelta a B y volverla a poner en la tostadora. Poner aparte a A y colocar C en la tostadora.

Segundo minuto: Tostar B-2 y C-1. Quitar las rebanadas, dar vuelta a C y volverla a poner en la tostadora. Dejar aparte a B (que ya está tostada por ambas caras) y poner a A otra vez en la tostadora.

Tercer minuto: Tostar las caras A-2 y C-2. Todas las caras de las tres rebanadas están tostadas ahora.

### 5. Las tres corbatas.

El señor Pardo, el señor Verde y el señor Negro estaban almorzando juntos. Uno de ellos llevaba una corbata parda, otro una corbata verde y otro una corbata negra.

- ¿Se han dado cuenta", dijo el hombre de la corbata verde, de que aunque nuestras corbatas son de colores iguales a nuestros nombres, ninguno de nosotros lleva la corbata que correspondería a su nombre?

- ¡Por Dios que tienes razón!", exclamó el señor Pardo.

¿De qué color era la corbata de cada uno?

### Solución

El señor Pardo tenía corbata negra. El señor Negro tenía corbata verde. El señor Verde tenía corbata parda.

Pardo no podía tener una corbata parda, pues entonces correspondería a su nombre. No podía tener corbata verde, pues ése, era el color de la corbata del hombre que le hizo la pregunta. Por lo tanto, la corbata de Pardo debe ser negra. Esto deja las corbatas verde y parda para el señor Negro y el señor Verde.



## Sección 10

### Acertijos engañosos

#### **Contenido:**

1. [Acertijos engañosos](#)
2. [Soluciones](#)

Los veintisiete acertijos de esta sección son cortos y fáciles, pero cada uno de ellos implica alguna clase de truco que da a la respuesta un giro inesperado. De alguna manera, podríamos llamarlos problemas humorísticos o graciosos, pero he preferido terminar el libro con ellos por una razón muy especial.

La razón es ésta: un matemático o científico creativo debe tener una mente constantemente en guardia, que no se deje sorprender por facetas inesperadas. Einstein, por ejemplo, el mayor científico de épocas recientes, jamás habría desarrollado su famosa teoría de la relatividad si no hubiera cuestionado ciertas suposiciones que ningún otro científico se había atrevido a cuestionar durante siglos. Resolvió problemas que parecían no tener solución, y los resolvió descubriendo el elemento "sorprendente", ese extraño factor oculto que todo el mundo había pasado por alto. A veces el nuevo giro es tan simple que, una vez descubierto, otros científicos se preguntan cómo no se les ocurrió a ellos. No se les ocurrió, sin duda, porque sus mentes estaban encadenadas por el hábito a las maneras de pensar familiares y ortodoxas.

Así que desempolva tu cerebro antes de intentar responder a estas divertidas preguntas. No son de gran importancia matemática... pero te enseñarán que en matemática, como en la vida, las cosas no son siempre lo que parecen.

#### **1. Acertijos engañosos**

1. ¿Puedes poner diez terrones de azúcar en tres tazas vacías de modo que en cada taza haya un número impar de terrones?
2. En la ferretería local, Jones se enteró que  $l$  le costaría 50 centavos,  $12l$  le costarían \$1,00 y que el precio de  $144l$  era \$1,50. ¿Qué era lo que Jones estaba comprando?

3. Observa con cuánta rapidez puedes anotar los dígitos de 9 a 1 de atrás para adelante, luego controla la respuesta para ver si has seguido bien las instrucciones.

4. ¿Con cuánta rapidez puedes hallar el producto de los siguientes números?

$$256 \times 3 \times 45 \times 3.961 \times 77 \times 488 \times 2.809 \times 0$$

5. Laringitis, un orador griego, nació el 4 de julio del 30 A. C. Murió el 4 de julio del año 30 D. C. ¿Qué edad tenía cuando murió?

6. Juntos perro y gato pesan 15 kilos. Si el peso del can es un número impar, y si el macho pesa el doble que la hembra, ¿cuánto pesa cada uno?

7. Después de una serie de experimentos, un químico descubrió que una determinada reacción química demoraba 80 minutos en producirse siempre que él usaba una corbata verde, y que la misma reacción demoraba una hora y veinte cuando él usaba una corbata roja. ¿Se te ocurre alguna razón para ello?

8. Un matemático se fue a acostar a las ocho de la noche, puso el despertador para las 9 de la mañana y se fue a dormir de inmediato. ¿Cuántas horas había dormido cuando el despertador lo despertó?

9. Divide 30 por  $1/2$  y suma 10. ¿Cuál es el resultado?

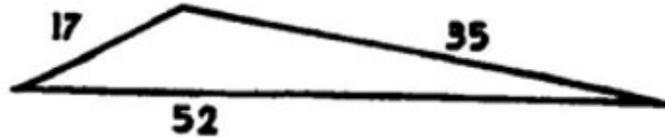
10. Un chico tenía cinco manzanas y se comió todas salvo tres. ¿Cuántas manzanas quedaron?

11. ¿Cuáles dos números enteros (no fracciones) dan el número de la mala suerte, 13, cuando son multiplicados entre sí?

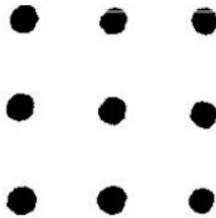
12. Un lector de este libro estaba tan enojado por no poder hallar las respuestas de todos estos problemas que arrancó las páginas 6, 7, 84, 111 y 112. ¿Cuántas hojas arrancó en total?

13. Si a un reloj le lleva cinco segundos dar las 6, ¿cuánto tiempo le llevará dar las 12?

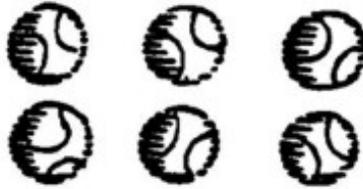
14. Un triángulo tiene lados de 17, 35 y 52 centímetros. ¿Cuál es su superficie en centímetros cuadrados?



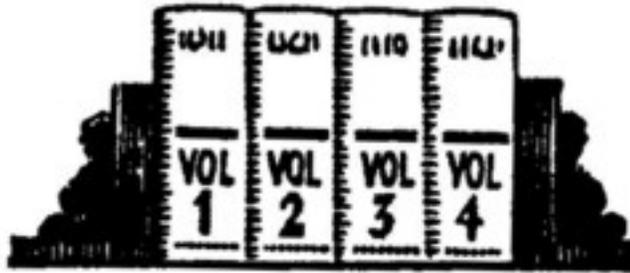
15. ¿Puedes trazar cuatro líneas rectas, sin levantar la punta del lápiz del papel, que pasen por los nueve puntos de la ilustración?



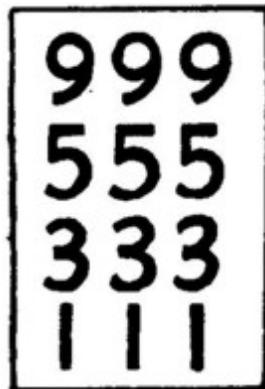
16. ¿Puedes trazar dos líneas rectas, sin levantar el lápiz del papel, que pasen por las seis pelotas de béisbol que aparecen en la ilustración?



17. Cada libro de los que se ven en la ilustración tiene cinco centímetros de grosor. Esa medida incluye las tapas, que tienen un grosor de  $\frac{1}{4}$  de centímetro. Si una polilla que come papeles empieza por la primera página del volumen 1 y se abre camino hasta la última página del volumen 4, ¿qué distancia habrá recorrido?



18. ¿Puedes elegir seis dígitos de los que se ven en la ilustración que sumados den 21?



19. Demuestra de qué manera se puede cortar un panqueque en ocho partes con tres cortes rectos de cuchillo.

20. Un insecto se arrastra a lo largo de una regla desde la marca de los 10 centímetros de un extremo hasta la marca de los 5 centímetros que está en el centro. Ese trayecto le lleva 10 segundos. Siguiendo su camino, se desplaza desde la marca de los 5 centímetros hasta la marca de 1 centímetro, pero ese recorrido le lleva solamente ocho segundos. ¿Se te ocurre alguna buena razón que justifique esa diferencia de tiempo?

21. ¿En qué se basa el orden en que se han dispuesto estos diez dígitos?

0-5-4-2-9-8-6-7-3-1

22. Si hay doce estampillas de un centavo en una docena, ¿cuántas estampillas de dos centavos habrá en una docena?

23. Coloca una moneda en cada uno de los sitios que muestra la ilustración adjunta. ¿Puedes cambiar la posición de sólo una moneda y formar dos filas rectas que contengan cuatro monedas cada una?



24. Un lógico se encontró en una pequeña ciudad que sólo tenía dos peluqueros, cada uno de ellos con su propia peluquería. Como necesitaba un corte de pelo, miró hacia el interior de una de las peluquerías y vio de inmediato que

era extremadamente sucia. El mismo peluquero necesitaba una afeitada, sus ropas estaban sucias, su pelo descuidado y mal cortado. La otra peluquería resultó ser impecable. El barbero estaba recién afeitado, impecablemente vestido y tenía el pelo prolijamente cortado. El lógico pensó un momento y luego regresó a la primera peluquería para hacerse cortar el pelo. ¿Por qué?

25. Cuando los dos desconocidos con los que se habían citado a ciegas llegaron para llevarlas a un partido de fútbol, Katy y Susan quedaron atónitas al ver que los dos jóvenes eran exactamente iguales. "Sí, somos hermanos", explicó uno de ellos. "Nacimos el mismo día del mismo año y tenemos los mismos padres". "Pero no somos mellizos", dijo el otro. Katy y Susan quedaron perplejas. ¿Puedes explicar la situación?

26. Multiplicar 10 metros por 10 metros da 100 metros cuadrados. ¿Cuánto da diez dólares por diez dólares?

27. Cuando el joven pagó su desayuno a la cajera, ella advirtió que él había dibujado un triángulo en el reverso de la cuenta. Debajo del triángulo había anotado:

$$13 \times 2 = 26.$$

La cajera sonrió: "Veo que eres marinero", dijo.  
¿Cómo supo la cajera que el joven era marinero?

## 2. Soluciones

1. Hay quince soluciones diferentes para este problema, pero todas ellas involucran el mismo truco. Por ejemplo: pon siete terrones en una taza, dos en otra y uno en la tercera. Ahora pon la última dentro de la segunda. ¡La segunda contendrá entonces tres terrones!
2. Jones estaba comprando números sueltos de metal.

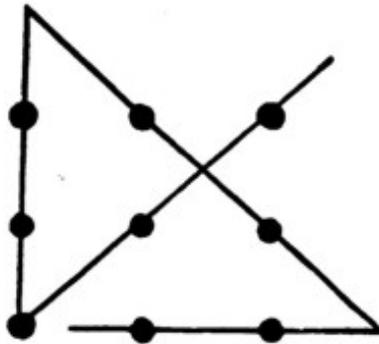
3. Los dígitos de 9 a 1 de atrás para adelante son: 1-2-3-4-5-6-7-8-9
4. ¿Viste ese cero al final antes de empezar a multiplicar? Si lo ves, sabrás inmediatamente que la respuesta final tiene que ser cero.
5. Laringitis tenía 59 años (no hubo ningún año cero).
6. El perro, una pequeña Pomerania llamada Henrietta, pesa 5 kilos, y el enorme gatazo llega a los 10. Si supusiste que el perro era "él" y el gato "ella", probablemente no llegaste a ningún lado.
7. No hay nada que explicar porque 80 minutos es lo mismo que una hora y "veinte minutos.
8. El matemático sólo tuvo una hora de sueño. La alarma del reloj lo despertó a las nueve de esa misma noche.
9. Treinta dividido por  $1/2$  es 60, así que cuando se le suman 10, da 70, que es la respuesta final.
10. Quedaron tres manzanas.
- 11.

$$13 \times 1 = 13$$

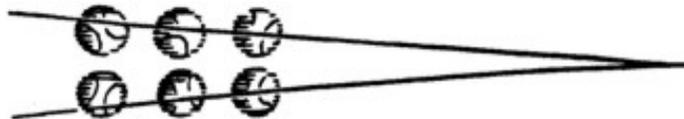
12. Sólo arrancó cuatro hojas de papel; porque las páginas 111 y 112 son ambas caras de una misma hoja.
13. Al reloj le llevará 11 segundos dar las 12. Hay un segundo entre cada campanada.

14. Un "triángulo" con esos lados sería una línea recta (los matemáticos a veces lo llaman un "triángulo degenerado"), de modo que no tendría ninguna superficie. Es verdad que se mostraba un triángulo en la ilustración, pero sólo era para desconcertarte; ese triángulo sin duda no podía tener los lados que se indicaban.

15. La forma de hacerlo es



16. Como las pelotas de béisbol son puntos más grandes, todas ellas pueden cruzarse trazando dos líneas que se unen en la extrema derecha, tal como se ve en la ilustración.



17. La primera página del volumen 1 está a la derecha del libro cuando los volúmenes están colocados en el estante, y la última página del volumen 4 está a la izquierda del libro. En consecuencia, la polilla sólo tiene que pasar por la tapa del volumen 1, recorrer todo el volumen 2 y el volumen 3, y la tapa del volumen 4, lo que totaliza una distancia de 10 centímetros y  $\frac{1}{2}$ .



18. Invierte el libro y marca con círculos tres 6 y tres 1.
19. Dos cortes en ángulo recto dividirán el panqueque en cuatro partes. Apíalos y córtalos por la mitad con el tercer corte para hacer ocho partes.
20. El insecto se mueve a una velocidad constante de un centímetro cada dos segundos. ¿Se te ocurrió pensar que la distancia desde el centro de la regla hasta la marca de 1 centímetro es de sólo cuatro centímetros?
21. Los dígitos están dispuestos de tal manera que sus nombres quedan en orden alfabético.
22. Doce.
23. Recoge la moneda inferior y colócala encima de la moneda de la esquina.
24. Como en la ciudad había sólo dos peluqueros, cada uno de ellos tiene que haber cortado el pelo del otro. El lógico eligió al peluquero que le hizo el mejor corte de pelo a su rival.
25. Los dos jóvenes pertenecían a un conjunto de trillizos.

26. La pregunta no tiene sentido. Los dólares pueden sumarse entre sí, o restarse entre sí, pero no pueden multiplicarse o dividirse por algo que no sea un número puro.

28. ¡El joven tenía puesto un traje de mariner!

